

Herleitung der Übertragungsfunktion $H(s)$ eines elektrischen Filters

Robert Heß

8. Juni 2025

1 Einleitung

Diese Anleitung soll zeigen, wie aus einer elektrischen Schaltung die Übertragungsfunktion $H(s)$ im Bildbereich der Laplace-Transformation abgeleitet wird.

Voraussetzung zum Verständnis dieses Artikels ist, dass Sie die Übertragungsfunktion für Schaltungen nur mit ohmschen Widerständen, also ohne Kondensoren und Induktivitäten, berechnen können.

2 Prinzip für die Herleitung der Übertragungsfunktion

Es wird nach folgendem Prinzip vorgegangen:

Schritt 1: Kapazitäten C und Induktivitäten L entsprechend durch komplexe Widerstände X_C und X_L ersetzen

Schritt 2: Übertragungsfunktion $H(s)$ so berechnen, als seien X_C und X_L ohmsche Widerstände

Schritt 3: In der ermittelten Funktion X_C durch $1/sC$ und X_L durch sL ersetzen

Schritt 4: Übertragungsfunktion $H(s)$ in eine ordentliche Form bringen

3 Beispiel: Tiefpass erster Ordnung

Ein Tiefpass erster Ordnung sei gemäß der Schaltung links in Abbildung 1 realisiert. Im ersten Schritt ersetzen wir die Kapazität C durch den komplexen Widerstand X_C , siehe Abbildung 1 rechts.

Für die Herleitung der Übertragungsfunktion in Schritt 2 wenden wir das Prinzip des Spannungsteilers an, ersetzen in Schritt 3 X_C durch $\frac{1}{sC}$ bevor wir dann die Übertragungsfunktion $H(s)$ in einer gut lesbaren Form bringen:

$$\text{Schritt 2:} \quad H(s) = \frac{X_C}{R + X_C}$$

$$\text{Schritt 4:} \quad H(s) = \frac{1}{sRC + 1}$$

$$\text{Schritt 3:} \quad H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

Diese Gleichung ist uns mehrfach in der Vorlesung MS1 und MS2 begegnet.

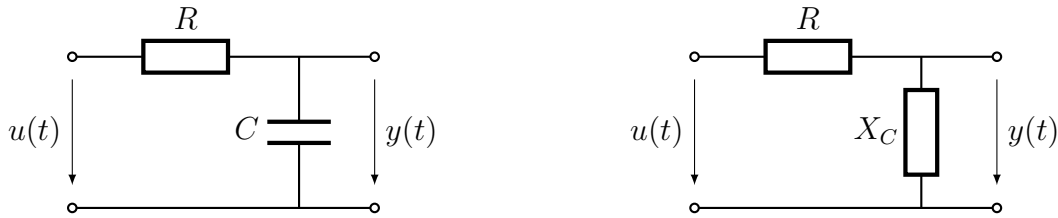


Abbildung 1: Tiefpass 1. Ordnung links mit Kondensator und rechts mit komplexen Widerstand X_C .

4 Beispiel: Hochpass zweiter Ordnung

Ein Hochpass zweiter Ordnung sei gemäß der Schaltung in Abbildung 2 links realisiert. Als ersten Schritt ersetzen wir Kapazität C und Induktivität L entsprechend durch die komplexen Widerstände X_C und X_L , siehe Abbildung 2 rechts.

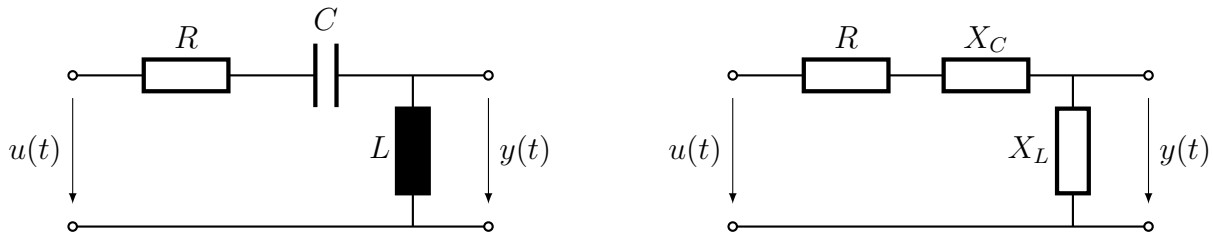


Abbildung 2: Hochpass 2. Ordnung links als LCR -Glied und rechts mit komplexen Widerständen rechts.

Für Schritt 2 wenden wir wieder das Gesetz des Spannungsteilers an, ersetzen dann in Schritt 3 C und L entsprechend durch sL und $\frac{1}{sC}$ und bringen schließlich in Schritt 4 die Übertragungsfunktion $H(s)$ in die übliche Form:

$$\text{Schritt 2: } H(s) = \frac{X_L}{R + X_C + X_L}$$

$$\text{Schritt 4: } H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$\text{Schritt 3: } H(s) = \frac{sL}{R + \frac{1}{sC} + sL}$$

5 Beispiel: Aktiver invertierende Tiefpass erster Ordnung

In Abbildung 3 ist links die Schaltung eines aktiven Hochpasses dargestellt. Der Vorteil gegen über einem passiven Hochpass ist, dass er weitgehend unabhängig von der Belastung am Ausgang arbeitet. In Abbildung 3 rechts ist als Schritt 1 die gleiche Schaltung mit dem Kondensator C als komplexen Widerstand X_C dargestellt.

Für die Herleitung der Übertragungsfunktion $H(s)$ erinnern wir uns in Schritt 3 daran, dass $x_- = x_+ = 0$ und das in den Eingang x_- quasi keine Strom fließt. Von daher muss durch den Widerstand links und die Parallelschaltung von C und R oben der gleiche Strom fließen. Danach ersetzen wir in Schritt 3 X_C mit $\frac{1}{sC}$ was bereits zu einer ordentlichen Form von $H(s)$ führt (Schritt 4):

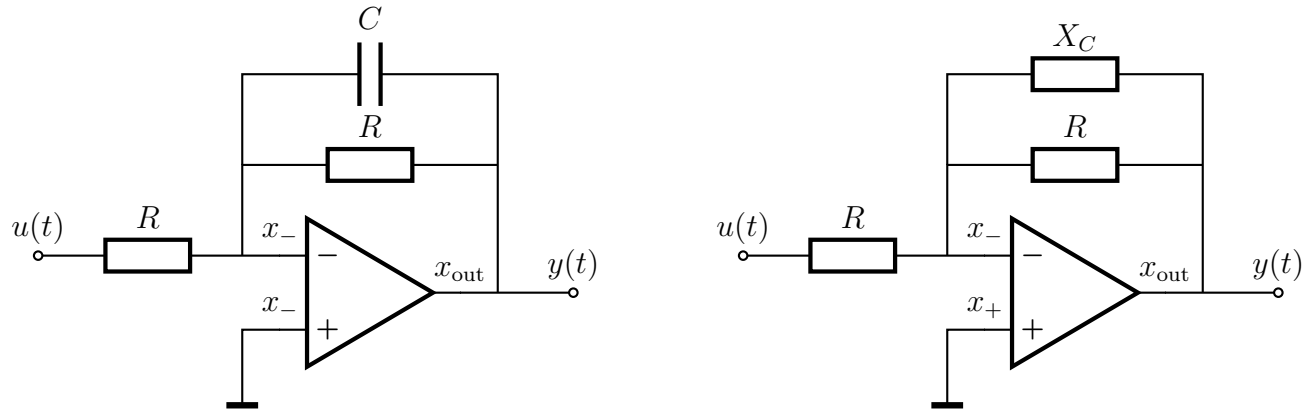


Abbildung 3: Schaltung eines aktiven Tiefpasses links mit zwei Widerständen und einem Kondensator und rechts mit komplexen Widerständen.

$$\text{Schritt 2:} \quad 0 = \frac{u}{R} + y \left(\frac{1}{X_C} + \frac{1}{R} \right) \quad \Rightarrow \quad H(s) = -\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{X_C} + \frac{1}{R}} = -\frac{1}{\frac{R}{X_C} + 1}$$

$$\text{Schritt 3+4:} \quad H(s) = \frac{-1}{1 + sRC}$$

6 Beispiel: Sallen-Key-Filter

Das Sallen-Key-Filter, benannt nach seinen beiden Entwicklern *R. P. Sallen* und *E. L. Key*, ist ein allgemeines Filter, welches durch geeignete Wahl der vier passiven Komponenten als Kondensator oder ohmschen Widerstand als einem Hoch- Tief- oder Bandpass realisiert werden kann. Abbildung 4 zeigt die allgemeine Schaltung, während Abbildung 5 die Realisierung als Tief- und Hochpass zeigt.

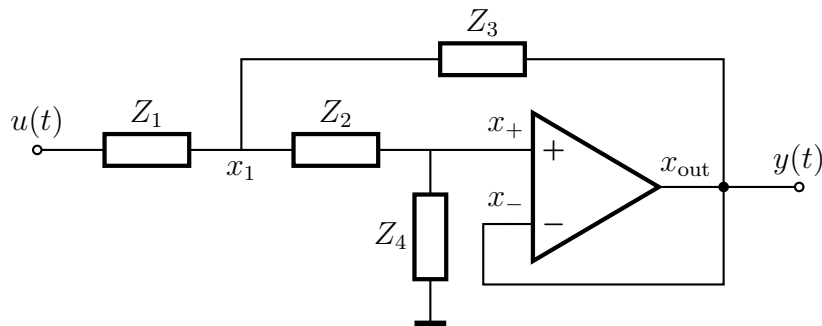


Abbildung 4: Allgemeine Schaltung des Sallen-Key-Filters.

Schritt 1 für die Herleitung Übertragungsfunktion ist durch die Schaltung in Abbildung 4 bereits gegeben. Wir erkennen, dass für einen Operationsverstärker in dieser Beschaltung der Zusammenhang $x_+ = x_- = y$ gültig ist. Wir wenden die Knotenregel für x_1 und x_+ an:

$$x_1: \quad 0 = \frac{u - x_1}{Z_1} + \frac{y - x_1}{Z_3} + \frac{y - x_1}{Z_2}$$

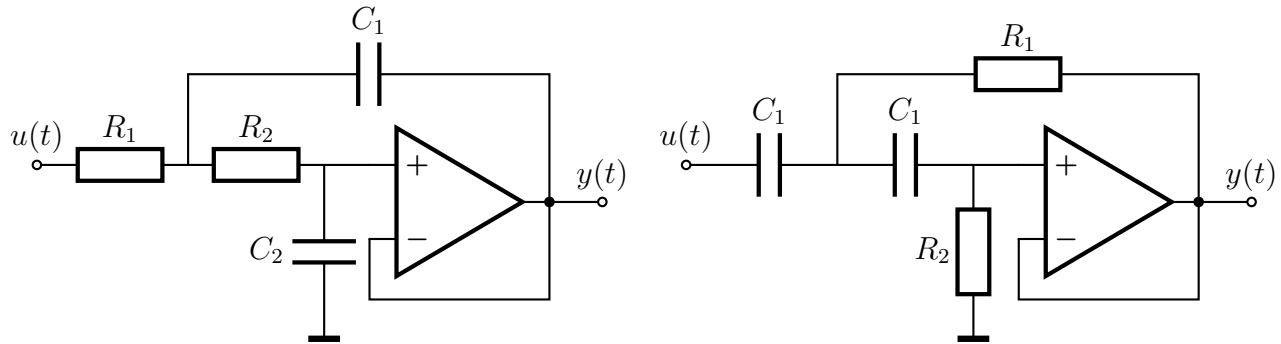


Abbildung 5: Sallen-Key-Filter links als Tiefpass und rechts als Hochpass.

$$\begin{aligned}
 x_+ : \quad & 0 = \frac{x_1 - y}{Z_2} - \frac{y}{Z_4} \implies x_1 = y \left(1 + \frac{Z_2}{Z_4} \right) \\
 x_+ \rightarrow x_1 : \quad & 0 = \frac{u - y \left(1 + \frac{Z_2}{Z_4} \right)}{Z_1} + \frac{y - y \left(1 + \frac{Z_2}{Z_4} \right)}{Z_3} + \frac{y - y \left(1 + \frac{Z_2}{Z_4} \right)}{Z_2} \\
 & u \frac{1}{Z_1} = y \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{1}{Z_4} \right) \\
 & u Z_3 Z_4 = y (Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3) \\
 & H(s) = \frac{y}{u} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3}
 \end{aligned}$$

Für den Tiefpass folgt mit $Z_1 := R_1$, $Z_2 := R_2$, $Z_3 := X_{C1}$ und $Z_4 := X_{C2}$:

$$H_{\text{TP}} = \frac{\frac{1}{s^2 C_1 C_2}}{\frac{1}{s^2 C_1 C_2} + \frac{R_2}{s C_1} + R_1 R_2 + \frac{R_1}{s C_1}} = \frac{1}{1 + s (R_2 C_2 + R_1 C_2) + s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}$$

Für den Hochpass folgt mit $Z_1 := X_{C1}$, $Z_2 := X_{C2}$, $Z_3 := R_1$ und $Z_4 := R_2$:

$$H_{\text{HP}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + \frac{R_2}{s C_1} + \frac{1}{s^2 C_1 C_2} + \frac{R_1}{s C_1}} = \frac{s^2}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}$$

In beiden Realisierungen hat das Filter im Durchlassbereich eine Verstärkung von 0 dB und fällt auf der anderen Seite mit 40 dB pro Dekade ab. Für $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ ergibt sich eine Grenzfrequenz von $\omega_g = 2\pi f_g = 1/(RC)$, bei der die Amplitude im 6 dB gesunken ist.