

Mechatronische Systeme

K. Jünemann und R. Heß
Fakultät Elektro- Medien- und Informationstechnik



6. Oktober 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Einführende Beispiele	3
1.2	Signale und Systeme	6
1.3	Analoge und Digitale Signale	6
2	Analoge Signale	8
2.1	Mathematische Grundlagen	8
2.2	Elementare Signale und Signaloperationen	16
2.3	Verallgemeinerte Funktionen	19
3	Analoge Systeme	23
3.1	Modelltypen und grundlegende Eigenschaften	23
3.2	Beschreibung von LZI-Systemen im Zeitbereich	26
3.3	Faltungsintegrale	29
3.4	Beschreibung von LZI-Systemen im Frequenzbereich	32
3.5	Graphische Darstellung des Frequenzgangs	35
4	Die Laplace-Transformation	39
4.1	Definition und Beispiele	39
4.2	Übertragungsfunktion von LZI Systemen	46
4.3	Stabilität von LZI-Systemen/Pol-Nullstellen-Diagramme	48
4.4	Beispiele einfacher LZI-Glieder	52
4.5	Kopplung von LZI-Gliedern	58
4.6	Einfache Regelkreise und Wurzelortskurve	63
5	Zustandsraumdarstellung und Signalflussdiagramme	68
5.1	Definition der Zustandsraumdarstellung	68
5.2	Aufstellen der Zustandsraumgleichungen	71
5.3	Die Zustandsraumdarstellung im Bildbereich	74
6	Digitale Systeme	77
6.1	Abtastung und diskrete Signale	77
6.2	Diskrete LZI-Systeme	79
6.3	Beschreibung von diskreten LZI-Systemen	81
6.4	Die z -Transformation	84
6.5	Übertragungsfunktion diskreter LZI-Systeme	86
6.6	Stabilität von diskreten LZI-Systemen	93

6.7	Nachbildung analoger Systeme	97
7	Fourier-Analyse	100
7.1	Fourierreihen	100
7.2	Die Fourier-Transformation	107
7.3	Die diskrete Fourier-Transformation (DFT)	114
7.4	Das Abtasttheorem	118
A	Polstellen und Zeitverhalten einfacher Systeme	126
A.1	Reelle Polstellen	126
A.2	Komplexe Polstellen	127
B	Die si-Funktion	128
C	Kleiner Wanderführer durch den Transformationswald	129
	Literatur	131
	Index	132

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführende Beispiele

In diesem Kurs werden die methodischen Grundlagen für eine Vielzahl von ingenieurstechnischen Anwendungen, wie zum Beispiel Regelungstechnik, Messdatenerfassung, Signalverarbeitung oder Kommunikationstechnik, gelegt. Die folgenden Beispiele sollen einige der Konzepte, um die es hier geht, erläutern:

Beispiel 1.1: Regelung der Rollbewegung eines Flugzeugs

Jedes moderne Flugzeug besitzt ein System zur automatischen Unterdrückung der Rollbewegung (verursacht etwa durch Windböen) durch das Querruder.

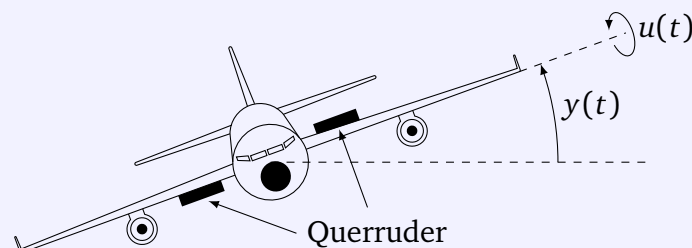


Abbildung 1.1: Rollwinkel $y(t)$ und Querruderausschlag $u(t)$.

Um solch eine Regelung zu entwerfen, sind viele der Konstruktionsdetails des Flugzeuges überhaupt nicht relevant. Es ist nur wichtig, den Rollwinkel $y(t)$, mit dem das Flugzeug auf den Ausschlag des Querruders $u(t)$ reagiert, zu kennen. Diese beiden Größen ändern sich im Laufe der Zeit und werden daher als Funktionen der Zeitvariablen t beschrieben. Der Regler muss wiederum mit einem passenden Querruderausschlag auf einen Rollwinkel reagieren. Diese Situation kann durch ein Signalflussdiagramm veranschaulicht werden, siehe Abbildung 1.2.

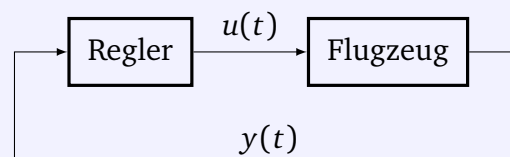


Abbildung 1.2: Regelung der Rollbewegung eines Flugzeugs als System.

Beispiel 1.2: RC-Glied als Tiefpassfilter

Wir betrachten einen RC-Tiefpassfilter erster Ordnung, siehe Abbildung 1.3. Mit i_C , u_C , i_R und u_R für Strom und Spannung an Kondensator und Widerstand kennen wir aus der Elektrotechnik:

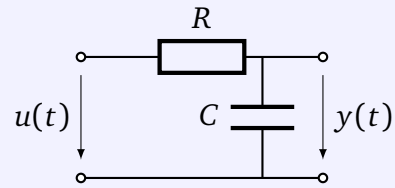


Abbildung 1.3: RC-Tiefpass erster Ordnung.

Kondensator:	$i_C(t) = C \dot{u}_C(t) = C \dot{y}(t)$	
Widerstand:	$u_R(t) = R i_R(t) = R i_C(t) = RC \dot{y}(t)$	
Reihenschaltung:	$RC \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$	(1.1)

Das ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Mittels dieser Gleichung kann für ein bekanntes Signal $u(t)$ am Eingang das Signal $y(t)$ am Ausgang bestimmt werden. Dazu werden wir später die Laplace-Transformation verwenden. Wichtige Eigenschaften dieser Schaltung:

- für niedrige Frequenzen: $y(t) \approx u(t)$
- für hohe Frequenzen: $y(t) \approx 0$
- Daher die Bezeichnung *Tiefpass*: Tiefe Frequenzen passieren, während hohe Frequenzen gedämpft werden.

Wird am Eingang des Systems ein Rechtecksignal angelegt, so kann mittels Laplace-Transformation das Signal am Ausgang bestimmt werden, siehe Abbildung 1.4.

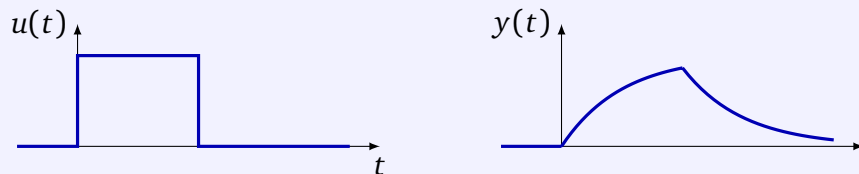


Abbildung 1.4: Beispiel für ein Ein- und Ausgangssignal an einem RC-Tiefpass.

Wir betrachten den RC-Tiefpass als ein System mit Ein- und Ausgang, siehe Abbildung 1.5. Diese oder ähnliche Filter finden sich in zahlreichen elektronischen Geräten, wie etwa Sound-Karten, Lautsprecher oder Fernseher. Für einen Ingenieur, der dieses Filter benutzen möchte, sind die Details der Verdrahtung unwichtig. Alles, was zählt, ist die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung.

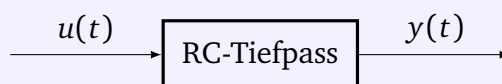


Abbildung 1.5: RC-Tiefpass als System.

Beispiel 1.3: a

Ein Lautsprecher wandelt elektrische Signale in Schallwellen. Kernstück ist ein Chassis, indem eine Stromdurchflossene Spule sich frei in einem Magnetfeld bewegen kann, und dabei eine Membran zum Schwingen bringt, siehe Abbildung 1.6.

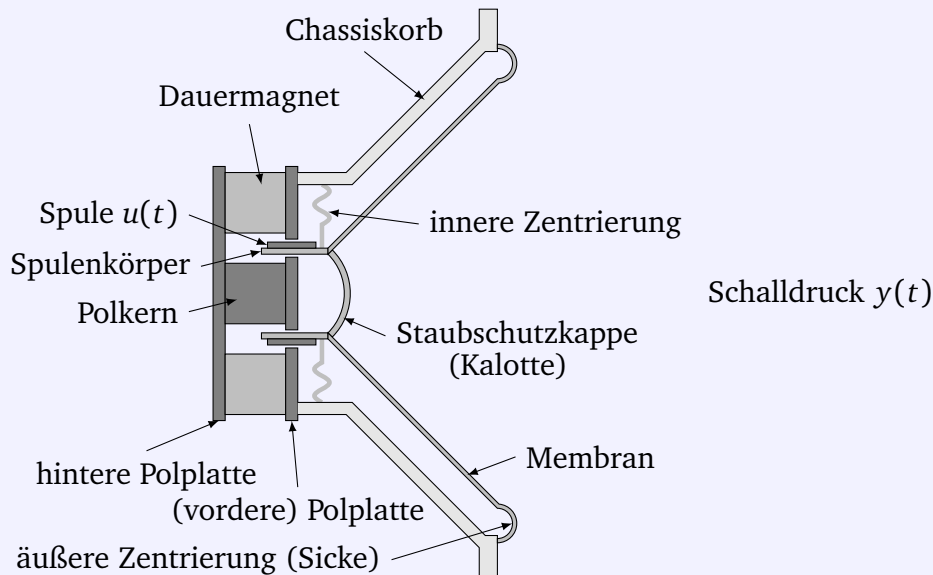


Abbildung 1.6: Schematischer Querschnitt durch ein Lautsprecherchassis.

Wir betrachten den Lautsprecher als ein System. Als Eingangssignal $u(t)$ legen wir eine Spannung an die Spule an. Der Schalldruck wird 1 m mittig vor dem Lautsprecher gemessen und dient als Ausgangssignal $y(t)$.

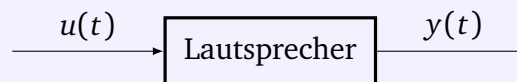


Abbildung 1.7: Ein Lautsprecher als System.

Von Interesse ist die Amplitude des Schalldrucks als Funktion der Frequenz. Zum Beispiel kann an einem Lautsprecher ein kurzer Impuls angelegt werden (ein Dirac-Signal $\delta(t)$) und aus dem gemessenen Schalldruck mittels Fourier-Transformation der komplexe Frequenzgang bestimmt werden. Abbildung 1.8 zeigt ein Beispiel eines gemessenen Amplitudengangs.

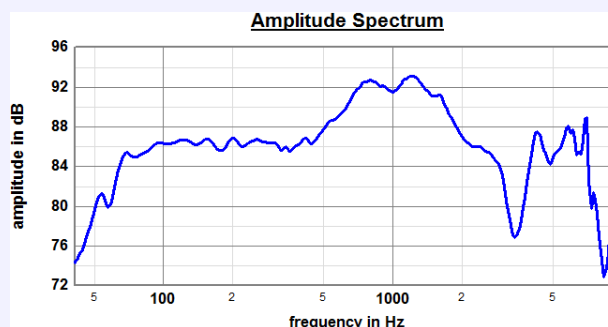


Abbildung 1.8: Gemessener Amplitudengang eines Tieftöners.

1.2 Signale und Systeme

Die Systemtechnik hat das Ziel, die spezifischen Beispiele ganz verschiedener Anwendungsgebiete zu abstrahieren und versucht ganz allgemein, Systeme mit Eingangs- und Ausgangssignalen, wie sie durch Linien und Blöcke in einem Signalfussdiagramm dargestellt werden, zu analysieren, siehe Abbildung 1.9.

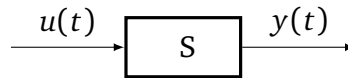


Abbildung 1.9: Graphische Darstellung eines Systems S , das ein Eingangssignal $u(t)$ in ein Ausgangssignal $y(t)$ transformiert.

Die zwei wesentlichen Abstraktionen, die in der Systemtechnik eine Rolle spielen, sind:

Signale, beschreiben sich zeitlich verändernde physikalische Größen. Wichtige Eigenschaften sind:

- Signale übertragen Energie und/oder Information,
- sie werden graphisch durch Linien repräsentiert,
- sie können mathematisch als Funktionen einer unabhängigen Variablen t beschrieben werden.

Systeme sind technische Komponenten, die Eingangs- in Ausgangssignale transformieren.

Ein System

- wird graphisch durch einen Block dargestellt,
- kann mit Hilfe von Hard- oder Software realisiert werden,
- kann durch Verknüpfung oder Verschachtelung Teil eines größeren Systems sein.

Wie im Beispiel über das RC-Glied schon angedeutet wurde, ist es bei vielen Systemen wichtig zu verstehen, wie sie auf Eingangssignale mit gegebener Frequenz reagieren. Diese Systemanalyse im Frequenzbereich als Ergänzung zur Systembeschreibung im Zeitbereich stellt einen wesentlichen Teil des Kurses dar.

1.3 Analoge und Digitale Signale

Analoge Signale sind messbare Signale aus der physikalischen Welt, siehe Abbildung 1.10 links. Sie sind

- zeitkontinuierlich, haben also zu jedem beliebigen Zeitpunkt einen entsprechenden Signalwert.
- wertkontinuierlich, können also beliebige Werte annehmen.

Wie oben schon erwähnt lassen sich analoge Signale als Funktion einer Zeitvariablen t beschreiben. Allerdings lassen sich analoge Signale nicht direkt in einem Computer speichern.

Digitale Signale existieren dagegen nur im Computer, siehe Abbildung 1.10 mitte. Sie sind

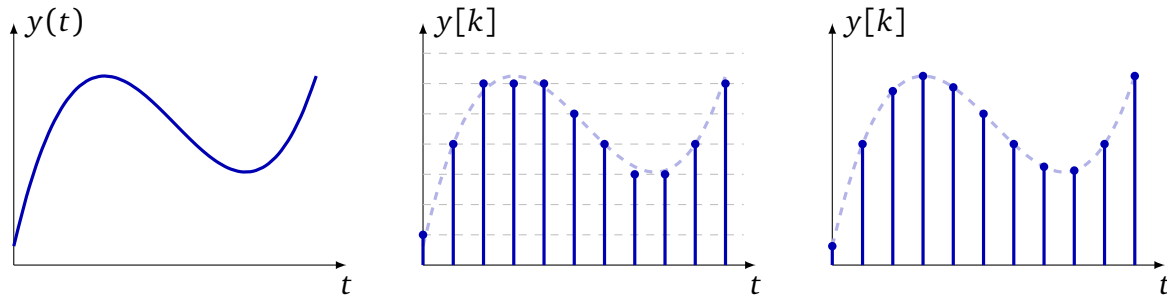


Abbildung 1.10: Ein kontinuierliches analoges Signal (links), ein zeitdiskretes quantisiertes Signal (mitte) und ein zeitdiskretes analoges Signal (rechts).

- zeitdiskret, also nur für bestimmte Zeiten t_k , $k \in \mathbb{N}_0$ definiert.
- quantisiert, können also nur diskrete Werte annehmen.

Aufgrund dieser beiden Eigenschaften können digitale Signale programmatisch in einem Array gespeichert werden.

Die Umwandlung zwischen analogen und digitalen Signalen findet in einem AD- beziehungsweise DA-Wandler statt. Bei der AD-Wandlung muss sowohl die Zeitachse als auch die Wertemenge diskretisiert werden. Die Diskretisierung der Wertemenge wird Quantisierung genannt und wird hier nicht weiter behandelt. Zur Diskretisierung der Zeitachse werden N äquidistante Zeitpunkte

$$t_k := k \cdot T_s \text{ mit } k = 0, 1, \dots, N-1$$

mit der *Abtastzeit* T_s definiert. Die zugehörige Frequenz

$$F_s := \frac{1}{T_s}$$

heißt *Abtastrate*. Ein Digitalsignal $y[k]$ wird durch Abtastung erzeugt, d.h. Messung eines analogen Signals $y(t)$ zu den diskreten Zeitpunkten t_k :

$$y[k] := y(t_k) = y(k \cdot T_s).$$

Diese Werte werden auch die Abtastwerte des Signals genannt, siehe Abbildung 1.10 rechts). Die Größe

$$T_0 := N \cdot T_s$$

gibt die Dauer der Abtastung, also die zeitliche Länge des Digitalsignals an.

Kapitel 2

Analoge Signale

2.1 Mathematische Grundlagen

Periodische Signale

Ein T -periodisches Signal $y(t)$ wiederholt sich nach einer Zeit T , d.h. es gilt

$$y(t) = y(t + T).$$

Periodische Signale sind eine mathematische Idealisierung, da sie keinen Start-oder Endzeitpunkt haben sondern sich periodisch bis ins Unendliche fortsetzen. Die Periodizität wird üblicherweise durch folgende Größen charakterisiert:

- T heißt die *Periode*.
- $f := 1/T$ heißt *Frequenz* und wird in $\text{Hz} = \frac{1}{s}$ gemessen.
- $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ heißt *Kreisfrequenz* (auf englisch *angular frequency*) und wird oft im Zusammenhang mit Sinus- oder Kosinusfunktionen verwendet.

Die Periode eines Signals ist nicht eindeutig: ein T -periodisches Signal hat auch die Perioden $2T$, $3T$ etc. oder allgemeiner $n \cdot T$ für jedes natürliche $n \in \mathbb{N}$. Die minimale Periode ist allerdings eindeutig. Oft ist mit dem Begriff Periode implizit die minimale Periode gemeint. Ein periodisches Signal ist eindeutig festgelegt, wenn es innerhalb einer Periode definiert ist. Außerhalb dieser Periode ist der Signalverlauf durch die Periodizität gegeben.

Die komplexe Exponentialfunktion

Die Position einer komplexen Zahl z in der Zahlenebene wird in der kartesischen Darstellung durch die x - und y -Koordinaten von z festgelegt. Alternativ lässt sich z durch die Angabe der folgenden Größen eindeutig festlegen (Abbildung 2.1):

$r = |z|$: Länge des Zeigers von z

φ : Der Winkel des Zeigers mit der reellen Achse

Die Zahlen (r, φ) heißen Polarkoordinaten von z . Aus der Skizze kann abgelesen werden, wie sich die kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten ineinander umrechnen lassen:

$$x = r \cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

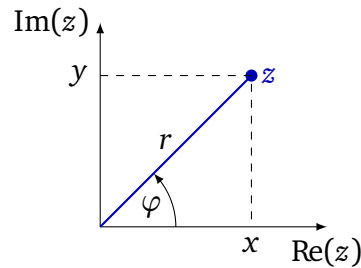


Abbildung 2.1: Darstellung einer komplexen Zahl $z = x + jy$ mittels Polarkoordinaten r und φ .

$$y = r \sin(\varphi) \qquad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

Zur Bestimmung des Winkels φ mit der Funktion $\arctan()$ muss für einen negativen Realteil der Winkel $\pi \text{ rad} = 180 \text{ deg}$ addiert bzw. subtrahiert werden (Abbildung 2.2):

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

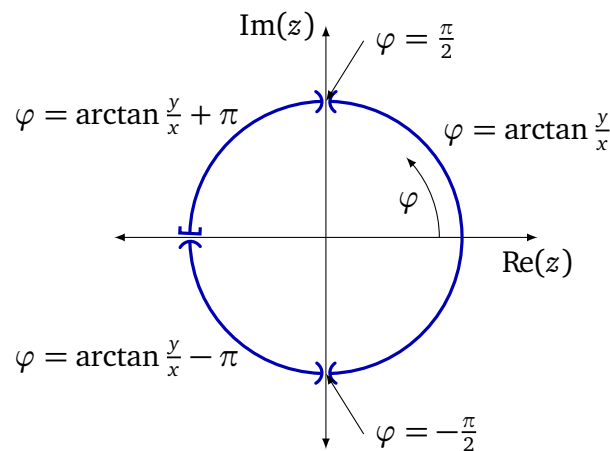


Abbildung 2.2: Darstellung der Argument-Funktion auf dem Einheitskreis.

Mit der wichtigen *Euler-Formel*

$$\cos(\varphi) + j \sin(\varphi) = e^{j\varphi}$$

lässt sich jede komplexe Zahl sehr kompakt durch Betrag und Phase angeben:

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)) = r \cdot e^{j\varphi}.$$

Der exponentielle Faktor hat den Betrag $|e^{j\varphi}| = 1$ und wird deshalb auch *reine Phase* genannt.

Wird zur Euler-Formel die komplex konjugierte Gleichung addiert oder subtrahiert, so können Sinus- und Kosinus-Funktion durch die komplexe Exponentialfunktionen ausgedrückt werden:

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}), \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$$

Komplexe Exponentialfunktionen lassen sich ableiten oder integrieren, indem die imaginäre Einheit j wie eine Konstante betrachtet wird.

Beispiel 2.1: Ableitung einer komplexen Exponentialfunktion

Es soll die komplexe Funktion $f(\varphi) = e^{j\varphi}$ zweimal nach φ abgeleitet werden. Dabei wird die imaginäre Einheit j als Konstante behandelt:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}f(\varphi) = \frac{d^2}{d\varphi^2}e^{j\varphi} = \frac{d}{d\varphi}je^{j\varphi} = -e^{j\varphi}$$

Beschreibung von Schwingungen

Diese Formeln können z.B. benutzt werden, um Schwingungen zu beschreiben. Eine harmonische Schwingung mit Amplitude A , Kreisfrequenz ω und Phase φ kann mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion als

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t + \varphi) &= \frac{1}{2}A(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}) = \frac{1}{2}Ae^{j\varphi}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}e^{-j\omega t} \\ &= \frac{1}{2}Be^{j\omega t} + \frac{1}{2}(Be^{j\omega t})^* = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \end{aligned}$$

dargestellt werden, wobei die komplexe Amplitude $B := Ae^{j\varphi}$ sowohl die reelle Amplitude A als auch die Phase φ enthält.

Zur Veranschaulichung kann die komplexe Funktion $z(t) = Be^{j\omega t}$ als rotierender Zeiger auf der komplexen Ebene betrachtet werden, siehe Abbildung 2.3. Die eigentliche Schwingung ist dann die Projektion des Zeigers auf die reelle Achse.

Gedämpfte Schwingungen

Ein besonders wichtige Bewegungsform stellt das Signal

$$y(t) = e^{\sigma t} \cos(\omega t) \quad (2.1)$$

dar (prinzipiell könnte auch eine Phase eingefügt werden, sie wird hier der Einfachheit halber auf null gesetzt). Es beschreibt eine Schwingung mit exponentiell ansteigender ($\sigma > 0$) oder abklingender ($\sigma < 0$) Amplitude, wie sie bei mechanischen oder elektrischen Systemen mit Dämpfung auftreten. Auch dieses Signal kann als Summe von Exponentialfunktionen geschrieben werden:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{\sigma t}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2}(e^{(\sigma + j\omega)t} + e^{(\sigma - j\omega)t}) = \frac{1}{2}(e^{s^*t} + e^{st}) = \operatorname{Re}(e^{st}) \quad (2.2)$$

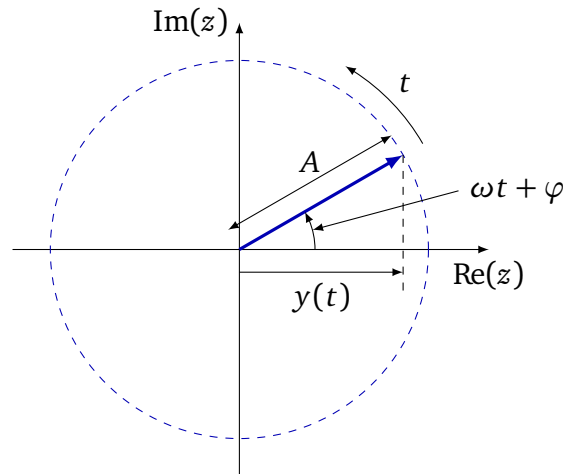


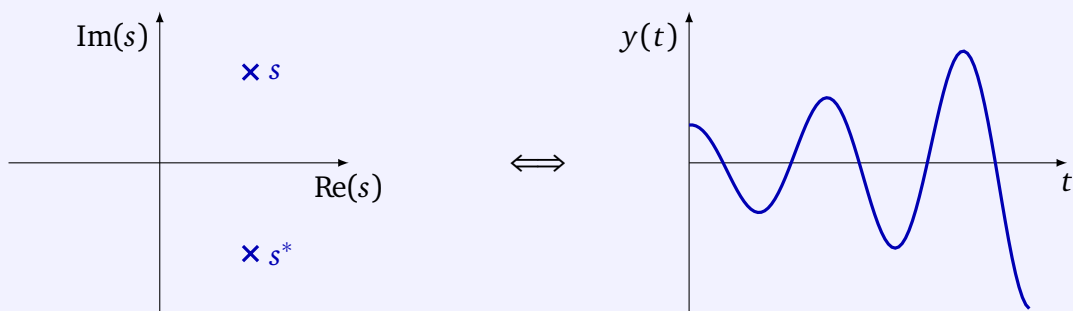
Abbildung 2.3: Beschreibung einer harmonischen Schwingung mittels Realteil einer komplexen Exponentialfunktion.

mit $s = \sigma + j\omega$ und dem komplex konjugierten Wert $s^* = \sigma - j\omega$. Sowohl die Dämpfung σ als auch die Frequenz ω können also durch eine komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$ beschrieben werden. Anstatt der üblichen Darstellung im Zeitbereich kann das Signal genauso gut durch die Lage des Parameters s in der komplexen Ebene charakterisiert werden. Im Fall einer ansteigenden Schwingung liegen s und s^* in der rechten Halbebene, wohingegen sie im Fall einer gedämpften Schwingung in der linken Halbebene liegen, siehe folgendes Beispiel:

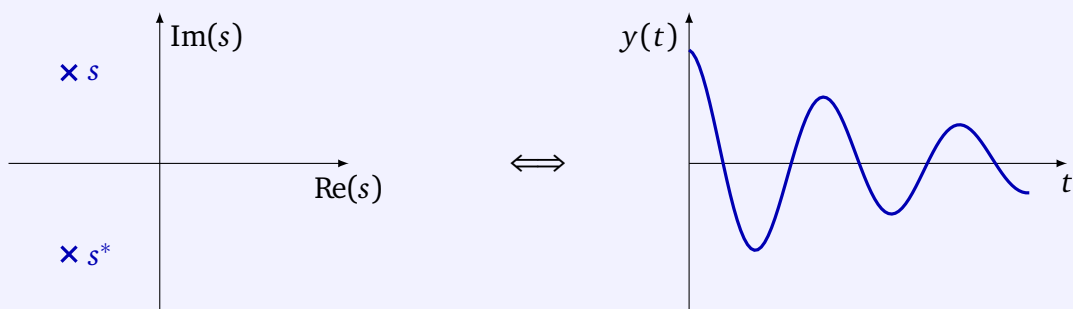
Beispiel 2.2: Gedämpfte Schwingungen mittels komplexer Exponentialfunktion

Eine gedämpfte (oder anschwellende) harmonische Schwingung lässt sich durch den Realteil einer Exponentialfunktion mit komplexen Argument $y(t) = \text{Re}(e^{st})$ darstellen.

- Ist der Realteil von s bzw. s^* positiv, so ergibt sich ein anschwellendes Signal:



- Ist der Realteil von s bzw. s^* negativ, so ergibt sich ein gedämpftes Signal:



Partialbruchzerlegung

In der Systemanalyse entstehen häufig große gebrochenrationale Funktionen:

$$H(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Zur weiteren Verarbeitung werden diese in partielle Brüche zerlegt:

$$H(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{Bs + C}{s^2 + as + b} + \dots$$

Die Umwandlung erfolgt in vier Schritten:

1. Umwandlung in eine echt-gebrochenrationale Funktion
2. Bestimmung der Nullstellen des Nenners
3. Wahl der geeigneten Summanden
4. Bestimmung der Konstanten $A, B, \dots$

Im folgenden werden diese vier Schritte erläutert:

1. Umwandlung in eine echt-gebrochen-rationale Funktion

Die Ordnung des Nenners muss höher als die des Zählers sein. Ist dies nicht der Fall muss eine Polynomdivision durchgeführt werden, siehe folgendes Beispiel:

Beispiel 2.3: Polynomdivision

Es soll folgende Funktion für die Partialbruchzerlegung vorbereitet werden:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

Die Ordnungen von Zähler und Nenner sind entsprechend $q = 3$ und $n = 2$. Da $n \not> q$ muss eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 + x - 3) / (x^2 - 3x + 2) = x + 2 + \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2} \\ -(x^3 - 3x^2 + 2x) \\ \hline 2x^2 - x - 3 \\ -(2x^2 - 6x + 4) \\ \hline 5x - 7 \end{array}$$

Als Ergebnis ergibt sich:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} = x + 2 + \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}$$

Das sind drei partielle Brüche, wobei die ersten beiden den Nenner 1 haben. Der letzte Summand ist eine echt-gebrochen-rationale Funktion, die bei der Partialbruchzerlegung weiter bearbeitet werden muss.

2. Bestimmung der Nullstellen des Nenners

Es werden die üblichen Methoden angewandt. Die komplexen Nullstellen tauchen nur als komplex konjugierte Paare auf und werden für die weitere Berechnung nicht getrennt, siehe folgendes Beispiel:

Beispiel 2.4: Nullstellen im Nenner

Wir betrachten folgende gebrochenrationale Funktion:

$$f(x) = \frac{1 - 3x^2 - 2x}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}$$

Es handelt sich um eine echt-gebrochen-rationale Funktion, so dass keine Polynomdivision nötig ist. Wir betrachten den Nenner:

- Empirisch finden wir Nullstellen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$
- Wir teilen den Nenner durch $(x - 1)$ und $(x - 2)$ erhalten $x^2 + 1$
- Es ergeben sich die letzten Nullstellen bei $x_3 = j$ und $x_4 = -j$
- Wir lassen die komplexen Nullstellen zusammen und erhalten:

$$f(x) = \frac{1 - 3x^2 - 2x}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2} = \frac{1 - 3x^2 - 2x}{(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)}$$

3. Wahl der geeigneten Summanden

Je nach Art der Nullstellen werden unterschiedliche Summanden angesetzt:

Einfache reelle Nullstelle: $\frac{A}{x - x_1}$

Doppelte reelle Nullstelle: $\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}$

Dreifache reelle Nullstelle: $\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \frac{C}{(x - x_1)^3}$

...

Konjugiert komplexe Nullstelle: $\frac{Ax + B}{x^2 + ax + b}$

Doppelte konjugiert komplexe Nullstelle: $\frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} + \frac{Cx + D}{(x^2 + ax + b)^2}$

...

Beispiel 2.5: Ansatz für partielle Brüche

Wir betrachten drei Beispiele mit unterschiedlichen Nullstellen im Nenner: a) mit drei unterschiedlichen reellen Nullstellen, b) mit einer doppelten reellen Nullstelle und c) mit einem Paar komplex konjugierten Nullstellen:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{6x^2 - 17x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \frac{6x^2 - 17x + 1}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \\ \text{b)} \quad & \frac{4x^2 - 2x + 6}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = \frac{4x^2 - 2x + 6}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3} \\ \text{c)} \quad & \frac{1 - 3x^2 - 2x}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2} = \frac{1 - 3x^2 - 2x}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \end{aligned}$$

4. Bestimmung der Konstanten

Wir setzen die rationale Funktion dem Ansatz der partiellen Summanden gleich und multiplizieren beide Seiten mit dem Nenner der zu zerlegenden Funktion. Dabei lassen sich bei den partiellen Brüchen deren Nenner kürzen.

Jetzt setzen wir zunächst x der Reihe nach auf die Werte der reellen Nullstellen und es ergeben sich direkt die ersten unbekannten Konstanten. Danach wählen wir andere einfache Werte für x , z.B. 0, ± 1 etc. Ggf. muss ein kleines Gleichungssystem gelöst werden.

Es folgt ein ausführliches Beispiel:

Beispiel 2.6: Finden der Konstanten bei Partialbruchzerlegung

Wir betrachten a) aus dem vorigen Beispiel:

$$\frac{6x^2 - 17x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \frac{6x^2 - 17x + 1}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Multiplikation mit dem Nenner und Kürzen der Nullstellen ergibt:

$$6x^2 - 17x + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)$$

Mit der Wahl geeigneter Werte für x folgt:

$$\begin{aligned} x = -1: \quad & 6 + 17 + 1 = A \cdot (-3) \cdot (-4) + B \cdot 0 \cdot (-4) + C \cdot 0 \cdot (-3) & \Rightarrow & A = 2 \\ x = 2: \quad & 24 - 34 + 1 = A \cdot 0 \cdot (-1) + B \cdot 3 \cdot (-1) + C \cdot 3 \cdot 0 & \Rightarrow & B = 3 \\ x = 3: \quad & 54 - 51 + 1 = A \cdot 1 \cdot 0 + B \cdot 4 \cdot 0 + C \cdot 4 \cdot 1 & \Rightarrow & C = 1 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{6x^2 - 17x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Abschließend ein vollständiges Beispiel:

Beispiel 2.7: Partialbruchzerlegung

Die folgende gebrochenrationale Funktion $f(x)$ soll in partielle Brüche zerlegt werden:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}$$

Es werden die vier gezeigten Schritte angewendet:

1. Umwandlung in eine echt-gebrochen-rationale Funktion

Die Funktion ist bereits echt-gebrochen-rational, von daher ist keine Polynomdivision nötig.

2. Bestimmung der Nullstellen des Nenners

Die erste Nullstelle lässt sich als $x_1 = 1$ empirisch finden, die mittels Polynomdivision aus dem Nenner entfernt wird:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) : (x - 1) = x^2 - 2x + 2 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -2x^2 + 4x \\ -(-2x^2 + 2x) \\ \hline 2x - 2 \\ -(2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

Die verbleibenden Nullstellen werden mittels quadratischer Ergänzung berechnet:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = -2 \Rightarrow (x - 1)^2 = -2 + 1 \Rightarrow x_{2,3} = 1 \pm j$$

3. Wahl der geeigneten Summanden

Für die reelle und das Paar konjugiert-komplexer Nullstellen ergeben sich zwei Summanden:

$$f(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2}$$

4. Bestimmung der Konstanten

Erst werden beide Seiten mit dem Nenner von $f(x)$ multipliziert und dann für x die Werte 1, 0 und -1 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2} \\ 3x^2 - x - 1 &= A(x^2 - 2x + 2) + (Bx + C)(x - 1) \\ x=1: \quad 3 - 1 - 1 &= A(1 - 2 + 2) + (B \cdot 1 + C)(1 - 1) &\Rightarrow A = 1 \\ x=0: \quad 0 + 0 - 1 &= 1 \cdot (0 + 0 + 2) + (B \cdot 0 + C)(0 - 1) &\Rightarrow C = 3 \\ x=-1: \quad 3 + 1 - 1 &= 1 \cdot (1 + 2 + 2) + (B \cdot (-1) + 3)(-1 - 1) &\Rightarrow B = 2 \end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet:
$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 2}$$

2.2 Elementare Signale und Signaloperationen

Die beiden folgenden Signale werden oft als einfache Testsignale zur Analyse von Systemen benutzt:

Die Sprungfunktion $\sigma(t)$

Die Sprungfunktion $\sigma(t)$ ist definiert als:

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

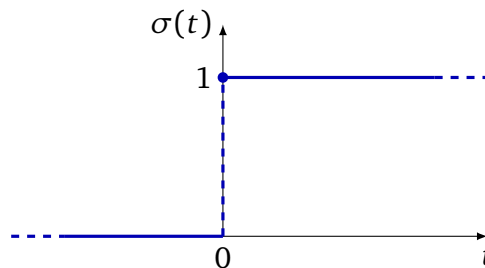


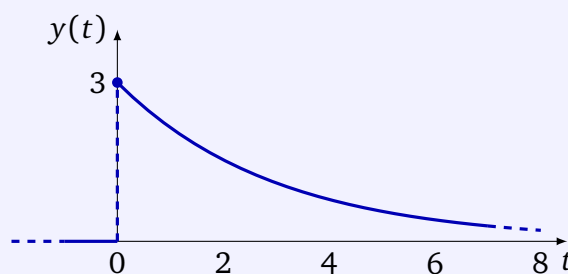
Abbildung 2.4: Die Sprungfunktion $\sigma(t)$.

Eine andere Bezeichnung ist *Heaviside-Funktion* (nach *Oliver Heaviside*). Mit der Sprungfunktion können Einschaltvorgänge oder auch kausale Signale beschrieben werden. Unter einem *kausalen Signal* $y(t)$ wird ein Signal verstanden, für das $y(t) = 0$ für $t < 0$ gilt.

Beispiel 2.8: Kausale Exponentialfunktion

Mittels der Sprungfunktion können die Werte für negative Argumente auf null gesetzt werden, womit die Funktion *kausal* wird. Beispielhaft soll hier die Funktion $3e^{-t/3}$ in eine kausale Funktion gewandelt werden, indem sie mit der Sprungfunktion $\sigma(t)$ multipliziert wird:

$$y(t) = \sigma(t) \cdot 3e^{-t/3}$$



Die Rechteckfunktion $\text{rect}(t)$

Die Rechteckfunktion $\text{rect}(t)$ ist definiert als:

$$\text{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

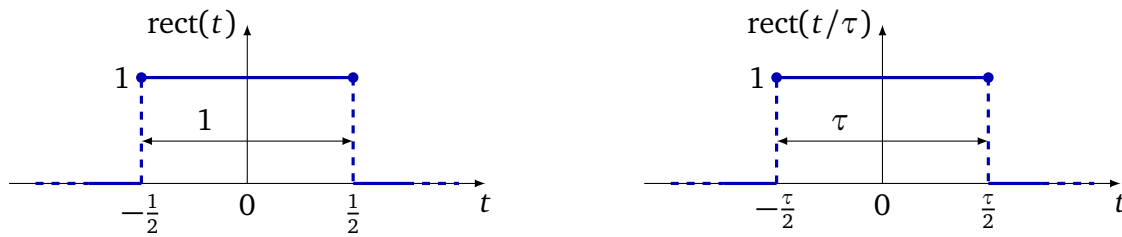


Abbildung 2.5: Die Rechteckfunktion, links $\text{rect}(t)$ mit Breite 1, rechts $\text{rect}(t/\tau)$ mit Breite τ .

Nach dieser Beschreibung hat die Rechteckfunktion eine Breite von eins, siehe Abbildung 2.5 links. Für eine beliebige Breite τ (Abbildung 2.5 rechts) ergibt sich:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{falls } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (2.4)$$

Beispiel 2.9: Rechteckfunktion als Summe von Sprungfunktionen

Das Rechtecksignal kann als Differenz zweier Sprungfunktionen dargestellt werden:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \sigma\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

Dem aufmerksamen Leser wird auffallen, dass an einem Punkt die Gleichung nicht präzise ist: An der Stelle $\frac{\tau}{2}$ hat die Rechteckfunktion den Wert 1, während die Summe den Wert 0 annimmt. Wir lassen diese Diskrepanz an dieser Stelle offen, stellen aber fest, dass die 'Energie' dieser Abweichung null ist, was in den meisten Situationen zu identischen Ergebnissen führt.

Zeitverschiebung

Für ein Signal $y(t)$ und eine vorgegebene Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$ hat das verschobene Signal

$$x(t) = y(t - t_0)$$

die gleiche Form wie $y(t)$, aber eine andere Position auf der t -Achse. $x(t)$ ist um $|t_0|$

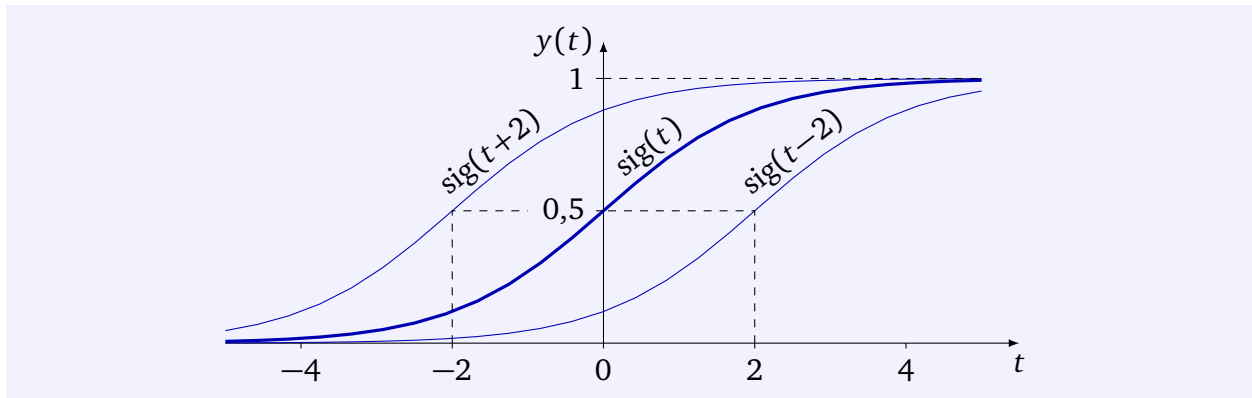
- nach rechts verschoben für $t_0 > 0$,
- nach links verschoben für $t_0 < 0$,

Beispiel 2.10: Zeitverschiebung

Die *Sigmoidfunktion* $\text{sig}(t)$ ist eine Funktion, die asymptotisch von null auf eins steigt. Sie ist definiert mit:

$$\text{sig}(t) := \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

In der dargestellten Skizze wird das Original in der Mitte fett gezeigt. Mit $t_0 = -2\text{ s}$ entsteht der Graph links, mit $t_0 = 2\text{ s}$ der Graph rechts:



Spiegelung

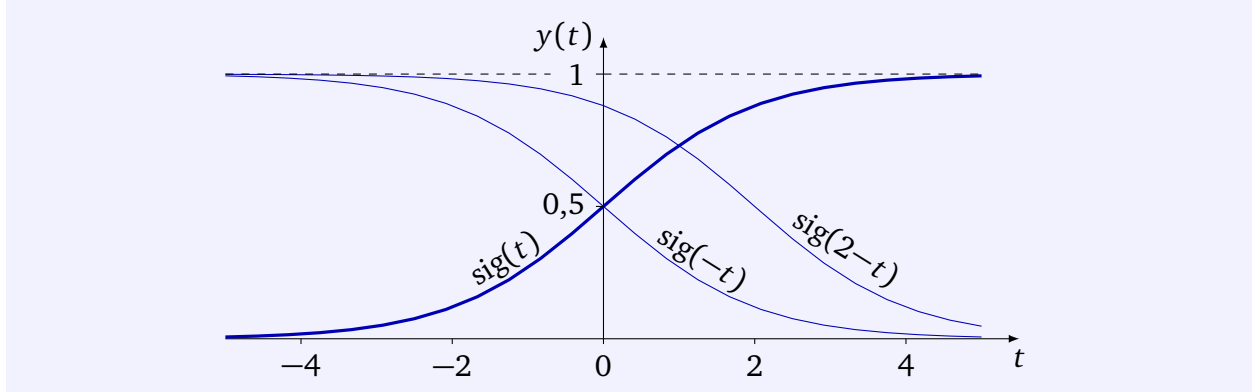
Für ein Signal $y(t)$ ergibt sich das gespiegelte Signal

$$x(t) = y(t_0 - t)$$

durch Spiegelung des Originals $y(t)$ an der vertikalen Achse bei $t_0/2$.

Beispiel 2.11: Spiegelung

Es soll die Sigmoidfunktion aus vorigen Beispiel gespiegelt werden. Unten ist fett gedruckt die unveränderte Funktion dargestellt. In der Mitte dünn ist die bei 0 gespiegelte Funktion $\text{sig}(-t)$ zu sehen. Rechts davon ist mit $t_0 = 2$ die bei 1 gespiegelte Funktion $\text{sig}(2-t)$ dargestellt.



Skalierung

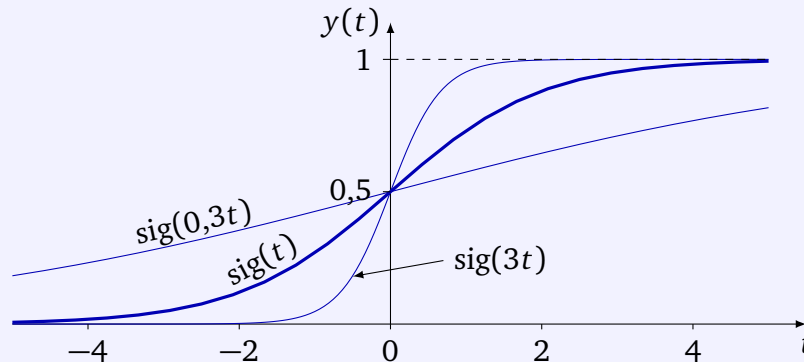
Eine Skalierung des Signals $y(t)$ wird durch

$$x(t) = y(at)$$

erzielt, indem das Original $y(t)$ gestaucht ($a > 1$) oder gestreckt ($a < 1$) wird.

Beispiel 2.12: Skalierung

Es soll die Sigmoidfunktion aus dem vorletzten Beispiel skaliert werden. Unten ist fett gedruckt die unveränderte Funktion dargestellt. Mit $a = 3$ wird deutlich, dass $\text{sig}(3t)$ deutlich gestaucht wurde, während mit $a = 0,3$ die Funktion gestreckt wurde.



2.3 Verallgemeinerte Funktionen

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine mathematische Größe – den sogenannten Dirac- δ -Puls – zu definieren, die einen beliebig kurzen Kraftstoß beschreibt. Dieser δ -Puls wird benutzt

- als Eingangssignal, um die Systemantwort auf eine kurze, aber heftige Anregung zu testen,
- um den Prozess der Abtastung mathematisch zu beschreiben (wird erst in MS2 behandelt).

Ein realistischer Stoß bei x_0 , der kurz aber heftig ist, kann näherungsweise durch ein schmales Rechtecksignal mit Fläche 1 beschrieben werden, siehe Abbildung 2.6 links.

Solange α genügend klein ist, spielt der genaue Wert in der Regel keine Rolle. Daher ist es eine sinnvolle Idealisierung, den Grenzwert $\alpha \rightarrow 0$ zu betrachten, siehe Abbildung 2.6 in der Mitte und rechts. Das führt auf die

Definition 2.1: Der δ -Impuls mit Position bei x_0 ist definiert als

$$\delta(x - x_0) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \cdot \text{rect}\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right). \quad (2.5)$$

Die wesentlichen Eigenschaften dieses δ -Pulses sind:

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{für } x \neq x_0 \quad (2.6)$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq x_0 \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7)$$

Bemerkungen:

- Neben dem *Dirac-Impuls* werden Bezeichnungen wie *Dirac-Puls*, *δ -Impuls* oder kurz *δ -Puls* verwendet.

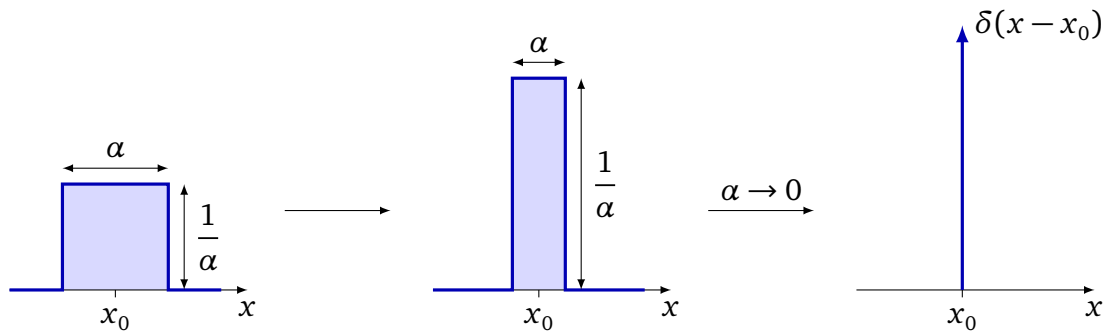


Abbildung 2.6: Definition des Dirac-Impuls' durch Näherung eines sehr schmalen und sehr hohen Rechtecks mit Fläche 1.

- $\delta(x - x_0)$ ist keine gewöhnliche Funktion, denn es gibt keine Funktion mit den beiden Eigenschaften (2.6) und (2.7). Daher wird der δ -Puls eine verallgemeinerte Funktion oder auch Distribution genannt. Entsprechend sind Gleichungen (2.5 - 2.7) nur vereinfachte Versionen einer mathematisch korrekten Definition der δ -Funktion, die in Grenzfällen (wie etwa a oder $b = x_0$ in Gleichung (2.7)) schnell an ihre Grenzen stoßen. Eine ausführlichere Diskussion der δ -Funktion findet sich etwa in [1].
- Der δ -Puls wurde vom britischen Physiker Paul Dirac erfunden, der damit die Ladungsdichte eines Elektrons beschrieben hat.
- Der δ -Puls kann nicht nur durch Rechteckfunktionen, sondern durch beliebige Funktionsfolgen beschrieben werden, solange nur der Grenzwert die Eigenschaften (2.6) und (2.7) erfüllt. Das führt zu verschiedenen δ -Darstellungen, von denen die Gebräuchlichsten hier für den Fall $x_0 = 0$ aufgelistet sind:

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2/a^2} \quad (2.8)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\pi} \cdot \text{si}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (2.9)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (2.10)$$

Eine Illustration des Grenzwertprozesses (2.8) findet sich auf der Seite <https://de.wikipedia.org/wiki/Delta-Distribution>.

Der δ -Puls taucht oft zusammen mit anderen Funktionen innerhalb eines Integrals auf. Diese Integrale können aufgrund der folgenden Verallgemeinerung der Eigenschaft (2.7) in der Regel sehr leicht ausgewertet werden:

Satz 2.2 (Ausblendeigenschaft):

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } a \leq x_0 \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

Dieses Resultat ist plausibel, denn aufgrund von (2.6) kann nur der Funktionswert $f(x_0)$ des Integranden an der Position des Peaks des δ -Pulses zum Integral beitragen.

Weitere Eigenschaften von $\delta(x)$:

- Physikalische Dimension: Anhand von (2.7) wird deutlich, dass die physikalische Dimension von $\delta(x)$ der Kehrwert der Dimension von x ist.

- Skalierung: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ für ein beliebiges $a \neq 0$

Die Skalierungseigenschaft folgt, wenn in der Gleichung $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy = 1$ die Substitution $y = ax$ erfolgt. Mit $a = -1$ wird deutlich, dass $\delta(-x) = \delta(x)$ gilt. Der δ -Puls hat also eine gerade Symmetrie.

- Ausblendeigenschaft ohne Integral:

$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0) \quad (2.12)$$

Dies wird deutlich, indem die Integranden der Gleichung

$$\int f(x)\delta(x-x_0) dx = f(x_0) = \int f(x_0)\delta(x-x_0) dx.$$

verglichen werden.

Beispiel 2.13: Ausblendeigenschaft des Dirac-Impuls' ohne Integral

$$\cos(x) \cdot \delta(x) = \cos(0) \cdot \delta(x) = \delta(x)$$

D.h. häufig können Ausdrücke, in denen ein δ -Impuls auftaucht, vereinfacht werden, indem die Variable x durch die Peak-Position x_0 ersetzt wird.

Zusammenhang zur Sprungfunktion $\sigma(x)$

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Sprungfunktion und dem δ -Puls. Ein Sprung wird genau dadurch erreicht, indem bei einer Integration die Peakposition eines δ -Pulses passiert wird:

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^x \delta(y) dy = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung lässt sich dieser Ausdruck ableiten, was zu der folgenden wichtigen Gleichung führt:

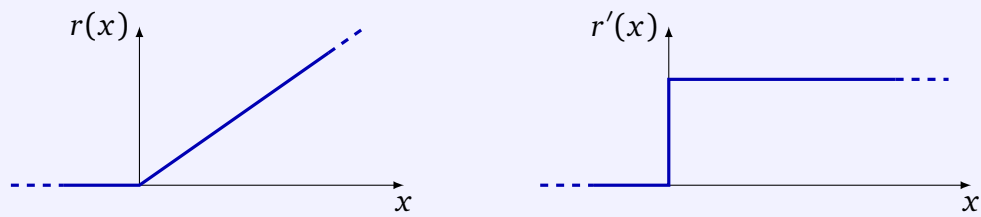
$$\frac{d}{dx} \sigma(x) = \delta(x) \quad (2.14)$$

Beispiel 2.14: Ableitung der Rampenfunktion

Die Ableitung der Rampenfunktion $r(x) = x \cdot \sigma(x)$ wird mit der Produktregel als

$$r'(x) = \sigma(x) + \underbrace{x \cdot \delta(x)}_{=0} = \sigma(x)$$

berechnet, denn $x \cdot \delta(x) = 0$ aufgrund von (2.12).



Dieses Beispiel zeigt, dass es die Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes durch den δ -Puls erlaubt, auch den Begriff der Ableitung auf Funktionen mit Knick- und Sprungstellen zu verallgemeinern, die im konventionellen Sinn nicht differenzierbar sind.

Kapitel 3

Analoge Systeme

3.1 Modelltypen und grundlegende Eigenschaften

Ganz allgemein wird unter einem System S eine Vorrichtung verstanden, die ein Eingangssignal $u(t)$ in ein Ausgangssignal $y(t)$ transformiert,

$$y(t) = S[u(t)].$$

In diesem Skript werden nur *SISO-Systeme* (Single-Input-Single-Output) betrachtet, bei denen $u(t)$ und $y(t)$ skalare Größen sind. Systeme mit vektoriellen Ein- und Ausgangsgrößen werden *MIMO* (Multiple-Input-Multiple-Output) genannt. In Signalflussdiagrammen werden Systeme als Block repräsentiert:

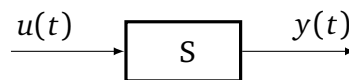
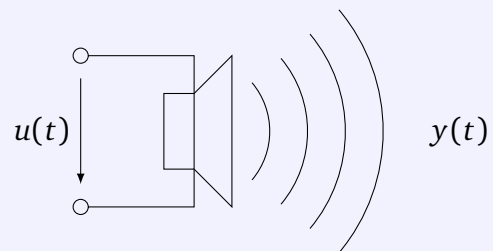


Abbildung 3.1: Ein System transformiert ein Eingangssignal $u(t)$ in ein Ausgangssignal $y(t)$.

Beispiel 3.1: Lautsprecher als System

Ein Lautsprecher kann als System betrachtet werden, siehe Abbildung 1.6. Das System transformiert die Spannung am Eingang $u(t)$ in den Schalldruck am Ausgang $y(t)$.

Beides, die Spannung am Eingang $u(t)$ und der Schalldruck am Ausgang $y(t)$ sind Skalare. Von daher handelt es sich um ein SISO-System.



Modellbildung

Realistische und praxistaugliche mathematische Modelle können verschiedene Formen haben. In der Regel besteht das Modell aber aus Differentialgleichungen, da die meisten physikalischen Grundgleichungen (wie etwa das Newtonsche Gesetz der Mechanik) als Differentialgleichungen formuliert werden. Bei der Modellbildung wird üblicherweise eine Kombination verwendet:

- qualitative physikalische Überlegungen, um die Struktur der Gleichungen festzulegen
- experimentelle Werte, um die Parameter zu bestimmen

Dieser Prozess wird Systemidentifikation genannt.

Beispiel 3.2: Modell für Rollbewegung eines Flugzeugs

Um ein Modell für das in Abbildung 1.1 dargestellte Flugzeug zu entwickeln, muss nur der Zusammenhang zwischen Rollwinkel $y(t)$ und Querruderausschlag $u(t)$ hergestellt werden. Andere Aspekte des Flugzeugs spielen keine Rolle.

Das Querruder erzeugt ein Drehmoment $M(t)$, das in etwa proportional zum Anstellwinkel $u(t)$ ist:

$$M(t) = k \cdot u(t),$$

Die Proportionalitätskonstante k hängt dabei von der Art des Flugzeugs ab. Das Newtonsche Gesetz für Rotationsbewegungen besagt, dass das Drehmoment eine Winkelbeschleunigung erzeugt,

$$I \cdot \ddot{y}(t) = M(t).$$

Dabei ist I das Massenträgheitsmoment des Flugzeuges für Drehungen um die Längsachse. Zusätzlich wird noch ein Reibungsterm proportional zu $\dot{y}(t)$ eingefügt, was zu der Modellgleichung

$$\ddot{y}(t) + \gamma \dot{y}(t) = Ku(t) \quad (3.1)$$

führt. Die Bestimmung der Konstanten γ und $K = k/I$ aus theoretischen Überlegungen wäre äußerst aufwendig und müsste viele Details der Flugzeugkonstruktion berücksichtigen. Sehr viel einfacher ist es, den Wert der Konstanten anhand eines Kalibrierungsversuchs experimentell zu bestimmen.

Modelleigenschaften

- 1.) Statische Modelle:** Statische Systeme sind Systeme ohne Gedächtnis, bei denen das Ausgangssignal $y(t)$ nur vom Eingangssignal $u(t)$ zum gleichen Zeitpunkt t , aber nicht von $u(t')$ zu früheren Zeiten $t' < t$ abhängt. Diese Systeme werden in der Regel durch algebraische Gleichungen ohne Ableitungen beschrieben und als Kennlinien graphisch dargestellt.
- 2.) Dynamische Modelle:** Dynamische Systeme sind Systeme, bei denen das Ausgangssignal $y(t)$ auch von der Vergangenheit, also von Werten $u(t')$ zu früheren Zeiten $t' < t$ abhängt. Dieses Systemverhalten kann durch Differentialgleichungen beschrieben werden.
- 3.) Linearität:** Ein System S heißt *linear*, wenn eine Linearkombination von Eingangssignalen zur gleichen Linearkombination der Ausgangssignale führt:

$$S[\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)] = \alpha_1 S[u_1(t)] + \alpha_2 S[u_2(t)], \quad (3.2)$$

$\alpha_{1,2}$ sind dabei Konstanten und $u_{1,2}(t)$ zwei Eingangssignale.

Lineare Systeme sind äußerst wichtig, denn praktisch jedes System kann in gewissen Bereichen durch ein lineares System angenähert werden. Dazu seien $\bar{u}$ und $\bar{y}$ ein stationärer Punkt eines Systems (auch Arbeitspunkt genannt), d.h. $\bar{y} = S[\bar{u}]$ wobei aber $\bar{u}$ und $\bar{y}$ beide zeitunabhängig sind. Die Gleichungen für S lassen sich dann durch die Abweichungen $\Delta y(t)$ und $\Delta u(t)$ vom stationären Punkt,

$$y(t) = \bar{y} + \Delta y(t) \quad , \quad u(t) = \bar{u} + \Delta u(t),$$

ausdrücken und in eine Taylorreihe entwickeln. Dicht am stationären Punkt sind Δy und Δu relativ klein, so dass quadratische Terme und Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden können, was auf lineare Gleichungen führt. Wenn sich das System weit weg vom stationären Punkt befindet, ist diese Linearisierung allerdings keine gute Näherung. Zusammengefasst gilt:

*Kleine Abweichungen von einem stationären Punkt
lassen sich durch lineare Systeme beschreiben.*

4.) Zeitinvarianz: Zeitinvarianz bedeutet, dass sich das System zu allen Zeiten gleich verhält. Ein um t_0 verschobenes Eingangssignal führt zu einem um dieselbe Zeit verschobenen Ausgangssignal, d.h. für ein zeitinvariantes System gilt

$$y(t) = S[u(t)] \implies y(t - t_0) = S[u(t - t_0)]. \quad (3.3)$$

Ein System ist zeitinvariant, wenn die Parameter des Systems konstant sind. Ein RC-Glied, Gl. (1.1), mit einem zeitlich veränderlichen Widerstand $R(t)$ wäre z.B. nicht zeitinvariant. Durch Effekte wie Alterung ist kein physikalisches System wirklich zeitinvariant, kann aber oft durch ein zeitinvariantes System gut angenähert werden.

Definition 3.1 (LZI-System): Ein System, das sowohl linear als auch zeitinvariant ist, also die Gleichungen (3.2) und (3.3) erfüllt, heißt *LZI-System*.

LZI-Systeme und lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Jedes LZI-System lässt sich als Kombination eines Totzeitglieds der Form $y(t) = u(t - t_0)$ und einer Differentialgleichung darstellen. Die Systemeigenschaften übertragen sich dabei auf die Eigenschaften der Differentialgleichung:

- Die Linearität des Systems bedeutet, dass die Differentialgleichung linear sein muss. Die Signale $y(t)$ und $u(t)$ sowie ihre Ableitungen tauchen also nur mit der Potenz 1 in der Gleichung auf.
- Zeitinvarianz bedeutet, dass die Koeffizienten der Differentialgleichung konstant sein müssen.

Die allgemeine Form einer solchen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$

$$b_q u^{(q)}(t) + b_{q-1} u^{(q-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \quad (3.4)$$

mit $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_q \in \mathbb{R}$. Die Ordnung n der höchsten Ableitung des Ausgangssignals $y(t)$ heißt die Ordnung des Systems. Einige wichtige Tatsachen über lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sind:

- Es werden n Anfangsbedingungen benötigt, um eine eindeutige Lösung der Gleichung (3.4) zu erhalten. Falls nicht anders angegeben, werden im Folgenden die Anfangsbedingungen

$$y^{(n-1)}(t) = \dots = \dot{y}(t) = y(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (3.5)$$

angenommen. Diese Anfangsbedingungen bedeuten, dass sich das System für negative Zeiten $t < 0$ zunächst vollständig in Ruhe befindet.

- Mit Anfangsbedingungen besitzt die Gleichung (3.4) immer eine eindeutige Lösung.

Beispiel 3.3: Differentialgleichung für Flugzeug und RC-Tiefpass

RC-Tiefpass: Die einzigen nicht-verschwindenden Koeffizienten des RC-Gliedes in Gleichung (1.1) sind $a_1 = RC$, $a_0 = 1$ und $b_0 = 1$.

Flugzeug: Das Flugzeugmodell in Gleichung (3.1) ist ein System zweiter Ordnung mit den Koeffizienten $a_2 = 1$, $a_1 = \gamma$ und $b_0 = K$.

3.2 Beschreibung von LZI-Systemen im Zeitbereich

Zunächst ist es sinnvoll, die Antwort eines LZI-Systems S auf einige Standardsignale am Eingang zu charakterisieren.

Definition 3.2 (Impuls- und Sprungantwort): Die Impulsantwort $h(t)$ eines LZI-Systems ist die Antwort auf das Eingangssignal $u(t) = \delta(t)$.

$$h(t) := S[\delta(t)] \quad (3.6)$$

Die Sprungantwort $g(t)$ ist die Systemantwort auf das Eingangssignal $u(t) = \sigma(t)$.

$$g(t) := S[\sigma(t)] \quad (3.7)$$

Die Impulsantwort $h(t)$ ist dabei von fundamentaler Bedeutung, denn mit ihrer Hilfe lässt sich die Systemantwort auf ein beliebiges Eingangssignal $u(t)$ berechnen. Dazu wird zunächst $u(t)$ mit Hilfe der Ausblendeigenschaft (2.11) als Integral ausgedrückt:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') u(t') dt'$$

Die Wirkung eines LZI-Systems S lässt sich aufgrund der Linearität in das Integral hineinziehen, denn das Integral ist als Grenzwert einer Summe definiert:

$$y(t) = S[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S[\delta(t - t')] u(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t') u(t') dt'$$

Im zweiten Schritt wurde dabei die Zeitinvarianz des Systems, Gleichung (3.3) in der Form $S[\delta(t - t')] = h(t - t')$ ausgenutzt. Das rechte Integral nennt sich Faltungsintegral (siehe Abschnitt 3.3) und wird mit $h * u$ bezeichnet. Zusammengefasst gilt:

Satz 3.3: Die Antwort $y(t)$ eines LZI-Systems mit Impulsantwort $h(t)$ auf ein Eingangssignal $u(t)$ lässt sich mit dem Faltungsintegral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t')u(t') dt' =: h * u(t) \quad (3.8)$$

berechnen.

Kausalität von LZI-Systemen

Unter *Kausalität* wird die Tatsache verstanden, dass eine Ursache ihrer Wirkung vorausgehen muss. Hier ist das Eingangssignal u die Ursache, die das Ausgangssignal y als Wirkung nach sich zieht. Kausalität bedeutet also, dass $u(t')$ keinen Einfluss auf $y(t)$ haben kann, falls $t' > t$ ist.

Im Integral (3.8) kann $h(t - t')$ als Faktor interpretiert werden, der angibt, welchen Einfluss $u(t')$ auf $y(t)$ hat. Kausalität bedeutet also $h(t - t') = 0$ für $t' > t \iff t - t' < 0$, bzw. $h(t) = 0$ für $t < 0$. Zusammengefasst gilt folgendes Prinzip:

Satz 3.4 (Kausalität): Die Impulsantwort $h(t)$ eines kausalen LZI-Systems erfüllt die Bedingung

$$h(t) = 0 \quad \text{für } t < 0. \quad (3.9)$$

Ein kausales LZI-System hat demnach eine kausale Impulsantwort. Der Integrationsbereich des Faltungsintegrals (3.8) lässt sich für kausale Systeme entsprechend auf das Intervall $(-\infty, t)$ einschränken. Wenn auch das Eingangssignal $u(t)$ für negative t den Wert 0 hat, wird das Faltungsintegral zu

$$y(t) = \int_0^t h(t - t')u(t') dt' \quad \text{für } h(t) \text{ und } u(t) \text{ kausal} \quad (3.10)$$

Zusammenhang zwischen Impuls- und Sprungantwort

Wenn Gleichung (3.8) auf das Eingangssignal $u(t) = \sigma(t)$ angewendet wird, lässt sich ein Zusammenhang zwischen Impuls- und Sprungantwort herleiten:

$$g(t) = h * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t')\sigma(t') dt' = \int_0^t h(t - t') dt'$$

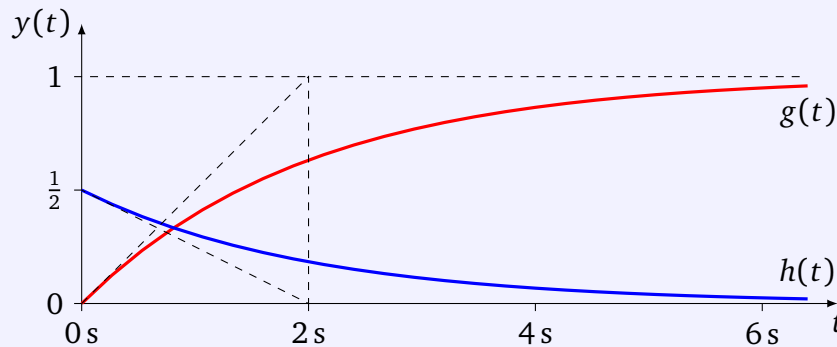
Dabei wurde die Sprungfunktion im Integranden durch die untere Grenze des Integrals und die Kausalität der Impulsantwort (3.9) durch die obere Grenze berücksichtigt. Mittels Substitution $t - t' \rightarrow t'$ lässt sich das Integral vereinfachen zu:

$$g(t) = \int_0^t h(t') dt' \iff \dot{g}(t) = h(t). \quad (3.11)$$

Beispiel 3.4: Impuls- und Sprungantwort des RC-Tiefpass'

Die Impuls- und Sprungantwort $h(t)$ und $g(t)$ des RC-Gliedes (1.1) sind

$$h(t) = \frac{1}{RC} \sigma(t) e^{-\frac{t}{RC}}, \quad g(t) = \sigma(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (3.12)$$



Impuls- und Sprungantwort des RC-Gliedes mit $RC = 2s$.

Die Systemantwort auf eine Rechteckspannung von 1V und Dauer T ,

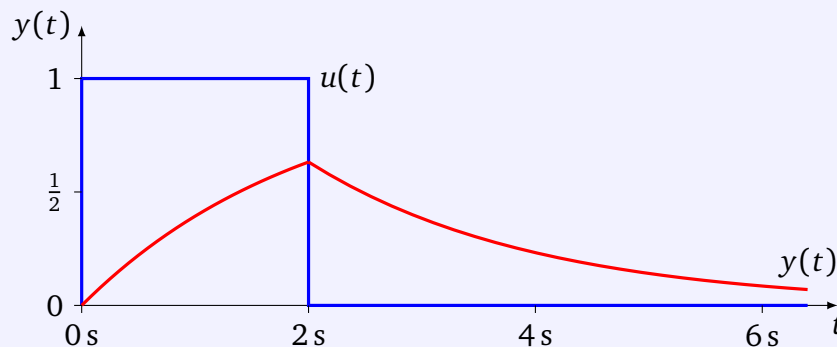
$$u(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right),$$

ergibt sich als Faltungsintegral mit $h(t)$ aus (3.12),

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t') u(t') dt' = \frac{1}{RC} \int_0^T \sigma(t - t') e^{-\frac{t-t'}{RC}} dt'.$$

Zur Lösung muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden, je nachdem ob das Ausgangssignal $y(t)$ nach dem Ausschalten der Rechteckspannung, also für $t \geq T$ oder vorher, also für $t < T$, berechnet werden soll.

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/RC} & \text{für } 0 \leq t < T \\ (e^{T/RC} - 1) e^{-t/RC} & \text{für } t \geq T \end{cases} \quad (3.13)$$



Antwort (rot) des RC-Gliedes mit $RC = 2s$ auf eine Rechteckspannung (blau) der Breite $T = 2s$.

3.3 Faltungsintegrale

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften des *Faltungsintegrals*, das etwa in Gleichung (3.8) aber auch in vielen anderen Anwendungsgebieten auftritt, besprochen.

Definition 3.5 (Faltung): $f(x)$ und $g(x)$ seien zwei integrierbare Funktionen. Dann heißt die Funktion

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x')g(x') dx' \quad (3.14)$$

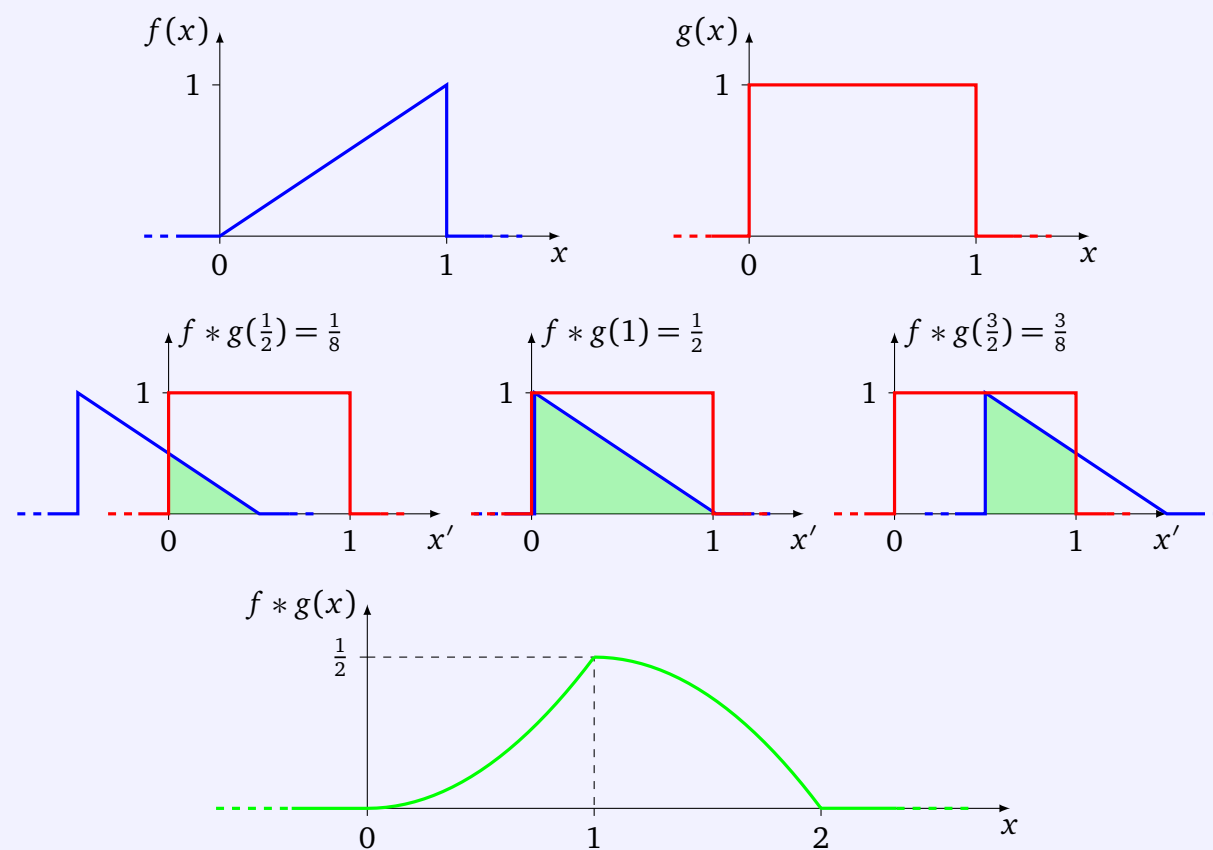
das Faltungsprodukt von $f(x)$ und $g(x)$.

Die englische Bezeichnung für Faltung ist *convolution*. Es ist zu beachten, dass die Faltung $f * g$ der Funktionen f und g wieder eine Funktion ist.

Graphisch ergibt sich folgendes Bild: Der rechte Faktor $g(x')$ lebt auf der Achse der Integrationsvariablen x' . Der andere Faktor $f(x - x')$ ist an der y -Achse gespiegelt und um den Wert x auf der x' -Achse verschoben. Wird nun x variiert, schiebt sich das Schaubild von f über das von g . Der Wert der Faltung $f * g$ bei x ist dann ein Maß für diese Überlappung. Auf der folgenden Webseite lässt sich dieser Vorgang visualisieren: https://alexanderustyuzhanin.github.io/Web_Convolution/

Beispiel 3.5: Grafische Darstellung einer Faltung

Es sollen die Funktionen $f(x) = x \cdot \text{rect}(x - \frac{1}{2})$ und $g(x) = \text{rect}(x - \frac{1}{2})$ gefaltet werden.

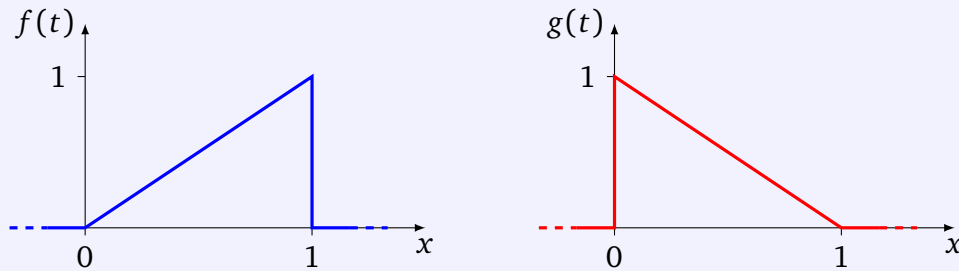


Beispiel 3.6: Faltungsintegral, rechnerisch

Es soll folgende Aufgabe rechnerisch gelöst werden:

$$f * g(t) \quad \text{mit} \quad f(t) = t \operatorname{rect}(t - \tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad g(t) = (1 - t) \operatorname{rect}(t - \tfrac{1}{2})$$

Skizze der beiden Faktoren:

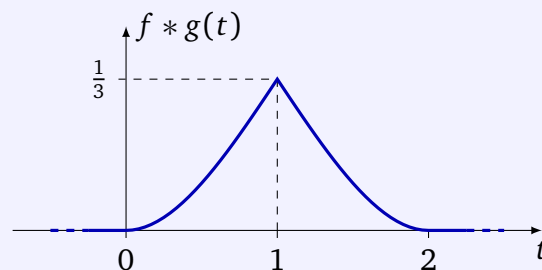


Wir unterteilen die Zeitachse in drei Teile, $[0, 1)$, $[1, 2)$ und sonst:

$$\begin{aligned} 0 \leq t < 1: \quad f * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t' - t) g(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - t') \operatorname{rect}(t - t' - \tfrac{1}{2}) (1 - t') \operatorname{rect}(t' - \tfrac{1}{2}) dt' \\ &= \int_0^1 (t - t') \operatorname{rect}(t - t' - \tfrac{1}{2}) (1 - t') dt' \\ &= \int_0^t (t - t') (1 - t') dt' = \int_0^t t'^2 - (t + 1)t' + t dt' \\ &= \left[\frac{t'^3}{3} - (t + 1) \frac{t'^2}{2} + t t' \right]_0^t = \frac{t^3}{3} - (t + 1) \frac{t^2}{2} + t^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \leq t < 2: \quad f * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - t') \operatorname{rect}(t - t' - \tfrac{1}{2}) (1 - t') \operatorname{rect}(t' - \tfrac{1}{2}) dt' \\ &= \int_{t-1}^1 (t - t') (1 - t') dt' = \left[\frac{t'^3}{3} - (t + 1) \frac{t'^2}{2} + t t' \right]_{t-1}^1 \\ &= \frac{1}{3} - (t + 1) \frac{1}{2} + t - \frac{(t - 1)^3}{3} + (t + 1) \frac{(t - 1)^2}{2} - t(t - 1) \\ &= \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$f * g(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3} & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Eigenschaften der Faltung

Wie schon die Notation andeutet hat das Faltungsprodukt einige Eigenschaften, die der Multiplikation von Zahlen ähnlich sind:

Kommutativgesetz: Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$f * g(x) = g * f(x) \quad (3.15)$$

Diese Gleichung ist nicht offensichtlich, da ja die beiden Faktoren f und g ganz unterschiedliche Rollen im Faltungsintegral spielen, und muss daher bewiesen werden. Dazu werde Substitution $u = x - x'$ mit $du = -dx'$ durchgeführt:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x')g(x')dx' = \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x - u)(-du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - u)f(u)du = g * f(x)$$

Assoziativgesetz: Für drei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ gilt:

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x) \quad (3.16)$$

Der Beweis verläuft ganz ähnlich (nur etwas länger) wie für das Kommutativgesetz und wird daher hier nicht weiter ausgeführt.

Neutrales Element: Für die Faltung einer Funktion $f(x)$ mit der δ -Funktion gilt:

$$f * \delta(x) = \delta * f(x) = f(x) \quad (3.17)$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als die Ausblendeigenschaft (2.11). Die δ -Funktion spielt für die Faltung die gleiche Rolle wie die Zahl 1 für die Multiplikation von Zahlen.

Diese Gleichungen zeigen, dass sich das Faltungsprodukt ganz ähnlich wie das Produkt von reellen Zahlen verhält. Diese Analogie hinkt allerdings an einer entscheidenden Stelle. Für Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ lässt sich die Gleichung $a \cdot b = c$ mit Hilfe einer Division nach a auflösen: $a = c/b$. Eine solche Division gibt es für die Faltung leider nicht, d.h. aus einer Faltung $f * g(x) = h(x)$ lässt sich die Funktion $f(x)$ auch bei Kenntnis der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ nicht ohne Weiteres exakt rekonstruieren. Techniken dazu finden sich in der Literatur unter dem Begriff *Dekonvolution*.

Faltung mit der δ -Funktion

In vielen Rechnungen taucht die Faltung eines Signals mit einem δ -Peak an der Stelle x_0 , also mit $\delta(x - x_0)$, auf. Mit der Ausblendeigenschaft (2.11) lässt sich diese Faltung leicht berechnen:

$$f * \delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x')\delta(x' - x_0)dx' = f(x - x_0)$$

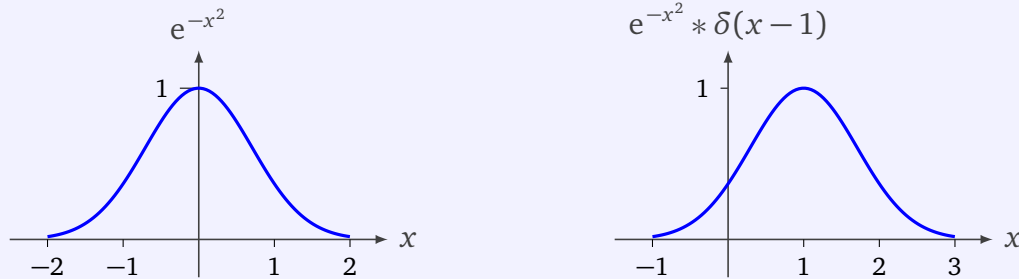
Der Fall $x_0 = 0$ wurde schon in Gleichung (3.17) beschrieben. Zusammengefasst gilt also:

Satz 3.6 (Faltung mit der δ -Funktion): Faltung einer Funktion $f(x)$ mit einem δ -Peak bei x_0 bedeutet Verschiebung der Funktion um x_0 :

$$f * \delta(x - x_0) = f(x - x_0) \quad (3.18)$$

Beispiel 3.7: Verschiebung der Gaußschen Glockenkurve

Eine Gaußsche Glockenkurve $f(x) = e^{-x^2}$ hat ihr Maximum bei 0. Faltung mit einem δ -Peak bei 1 verschiebt die Funktion um eine Einheit nach rechts, so dass das Maximum bei 1 liegt:



Die diskrete Faltung

Um die Faltung numerisch zu berechnen, muss das Integral (3.14) diskretisiert werden. Dazu seien $y[n]$ die mit der Abtastzeit T_s abgetasteten Werte eines analogen Signals $y(t)$. Ein Integral über $y(t)$ lässt sich mit Hilfe der Abtastwerte folgendermaßen annähern:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] \cdot T_s$$

Ganz ähnlich lässt sich dann auch ein Faltungsintegral der Form (3.14) diskretisieren:

$$y_1 * y_2(n T_s) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(n T_s - t) y_2(t) dt \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n-k] y_2[k] \cdot T_s$$

Das führt zu folgender

Definition 3.7 (Diskrete Faltung): Für zwei diskrete Signale $y_1[n]$ und $y_2[n]$ heißt die Summe

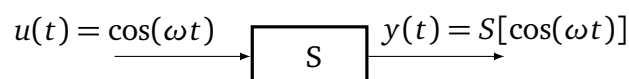
$$y_1 * y_2[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n-k] y_2[k] \quad (3.19)$$

diskrete Faltung von y_1 und y_2 .

In Matlab kann die diskrete Faltung mit der Funktion `conv` berechnet werden. Für Signale y_1 und y_2 der Länge N_1 bzw. N_2 hat das diskrete Faltungsprodukt die Länge $N_1 + N_2 - 1$.

3.4 Beschreibung von LZI-Systemen im Frequenzbereich

In diesem Abschnitt geht es um die Frage, wie ein LZI-System S auf eine harmonische Schwingung, also ein Kosinus- oder Sinus-Signal der Frequenz ω reagiert:



Insbesondere interessiert dabei, wie sich das Ausgangssignal $y(t)$ mit der Frequenz ω des Eingangssignals ändert. Diese Sichtweise wird die Frequenzdarstellung des LZI-Systems genannt.

Aus rechnerischen Gründen ist es vorteilhaft, das Kosinus-Signal als Realteil der komplexen Exponentialfunktion auszudrücken:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \implies \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{j\omega t})$$

Aus der Linearität des Systems S folgt dann:

$$\begin{aligned} S[e^{j\omega t}] &= S[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] = S[\cos(\omega t)] + j S[\sin(\omega t)] \\ \implies S[\cos(\omega t)] &= \operatorname{Re}(S[e^{j\omega t}]) \end{aligned}$$

Dadurch kann mit dem Eingangssignal

$$u(t) = e^{j\omega t} \quad (3.20)$$

gerechnet werden. Der Realteil des Ausgangssignals liefert dann die physikalisch relevante Systemantwort auf das Kosinus-Signal am Eingang. Diese Überlegung ist letztlich die Grundlage für die gesamte komplexe Wechselstromrechnung. Zu beachten ist, dass dieser Zusammenhang nur für lineare Systeme gilt.

Für ein LZI-System mit Impulsantwort $h(t)$ lässt sich der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal als

$$y(t) = h * u(t) = u * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - t') h(t') dt'$$

ausdrücken, wobei die Kommutativität der Faltung benutzt wurde. Einsetzen des Eingangssignals (3.20) liefert

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t')} h(t') dt' = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t'} h(t') dt'. \quad (3.21)$$

Die gesamte Zeitabhängigkeit steckt in der Exponentialfunktion vor dem Integral. Das Integral selbst ist nur ein frequenzabhängiger Faktor, der sogenannte *Frequenzgang*. Zusammengefasst gilt

Satz 3.8 (Frequenzgang eines LZI-Systems): Ein stabiles LZI-System mit Impulsantwort $h(t)$ reagiert auf ein Eingangssignal $u(t) = e^{j\omega t}$ mit dem Ausgangssignal

$$y(t) = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}. \quad (3.22)$$

Dabei wird der Vorfaktor $H(j\omega)$, definiert als

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.23)$$

der *Frequenzgang* des LZI-Systems genannt.

Bemerkungen:

- Das Integral (3.23) wird auch die *Fourier-Transformation* der Impulsantwort genannt. Die Fourier-Transformation wird in Abschnitt 7.2 in allgemeiner Form behandelt.
- Das Fourier-Integral ist ein uneigentliches Integral und konvergiert nur, wenn die Impulsantwort $h(t)$ für große t hinreichend schnell gegen 0 geht. Solche LZI-Systeme werden *stabil* genannt. Das Konzept der Stabilität wird in Abschnitt 4.3 im Detail behandelt.

Aus diesem Ergebnis lassen sich wichtige Konsequenzen ableiten: Das Ausgangssignal (3.22) ist wiederum eine harmonische Schwingung der Frequenz ω , allerdings multipliziert mit dem komplexen Frequenzgang. Wie jede komplexe Größe lässt sich auch der Frequenzgang in Betrag und Phase zerlegen:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)}$$

Der Betrag $|H(j\omega)|$ wird *Amplitudengang*, die Phase $\phi(j\omega)$ *Phasengang* genannt. Eingesetzt in Gleichung (3.22) ergibt sich:

$$y(t) = |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \phi(j\omega))}$$

Wie oben diskutiert ergibt sich die Systemantwort auf ein Kosinus-Signal als Realteil dieser Gleichung, also:

$$S[\cos(\omega t)] = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \phi(j\omega))$$

In dieser Darstellung wird deutlich, dass der Amplitudengang die Amplitude des Ausgangssignals und der Phasengang die Phasenverschiebung beschreibt.

Satz 3.9 (Amplituden- und Phasengang eines stabilen LZI-Systems): Die Antwort eines stabilen LZI-Systems mit Amplitudengang $|H(j\omega)|$ und Phasengang $\phi(j\omega)$ auf eine harmonische Schwingung mit Frequenz ω am Eingang ist wiederum eine harmonische Schwingung,

- welche die gleiche Frequenz ω hat,
- deren Amplitude um den Faktor $|H(j\omega)|$ verstärkt (oder gedämpft) wird,
- die um $\phi(j\omega)$ gegenüber dem Eingangssignal phasenverschoben ist.

Berechnung des Frequenzgangs

Das Fourier-Integral (3.23) lässt sich nur in den einfachsten Fällen berechnen. Glücklicherweise gibt es eine effiziente Methode, den Frequenzgang für beliebige Systeme, die durch eine lineare Differentialgleichung der Form (3.4) beschrieben werden, zu ermitteln. Diese Methode beruht auf der Tatsache, dass sich für das Eingangssignal in (3.20) und das entsprechende Ausgangssignal in (3.22) die k -ten Ableitungen explizit angeben lassen:

$$\begin{aligned} u(t) = e^{j\omega t} &\implies u^{(k)}(t) = (j\omega)^k \cdot u(t) \\ y(t) = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} &\implies y^{(k)}(t) = (j\omega)^k \cdot y(t) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (3.4) und Kürzen der Exponentialfunktion ergibt:

$$a_n(j\omega)^n H(j\omega) + \dots + a_1 j\omega H(j\omega) + a_0 H(j\omega) = b_q(j\omega)^q + \dots + b_1 j\omega + b_0$$

Auflösen nach $H(j\omega)$ liefert

Satz 3.10 (Frequenzgang eines stabilen LZI-Systems): Ein stabiles, durch eine Differentialgleichung der Form (3.4) beschriebenes LZI-System hat den Frequenzgang:

$$H(j\omega) = \frac{b_q(j\omega)^q + b_{q-1}(j\omega)^{q-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1j\omega + a_0} \quad (3.24)$$

Beispiel 3.8: Frequenzgang eines stabilen RC-Tiefpass'

Mit den Koeffizienten $a_1 = RC$, $a_0 = 1$ und $b_0 = 1$ für den RC-Tiefpass (1.1) ergibt sich für den Frequenzgang:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} \quad (3.25)$$

In diesem speziellen Fall lässt sich der Frequenzgang auch berechnen, indem die Impulsantwort aus Gleichung (3.12) in das Fourier-Integral (3.23) eingesetzt wird, denn die sich ergebende Exponentialfunktion lässt sich einfach integrieren.

Für genügend hohe Frequenzen werden Zähler und Nenner des Frequenzgangs durch die höchsten Potenzen bestimmt, es gilt also

$$H(j\omega) \rightarrow \frac{b_q(j\omega)^q}{a_n(j\omega)^n} = \frac{b_q}{a_n}(j\omega)^{q-n} \quad \text{für } \omega \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Für $q > n$ strebt der Amplitudengang gegen ∞ für $\omega \rightarrow \infty$, d.h. beliebig hohe Frequenzen am Eingang werden um einen beliebig hohen Faktor verstärkt. Dieses Verhalten ist unphysikalisch, denn jedes reale System besitzt eine innere Trägheit, aufgrund derer es hinreichend hohe Frequenzen dämpft. Systeme mit $q > n$ werden daher als *technisch nicht realisierbar* bezeichnet.

3.5 Graphische Darstellung des Frequenzgangs

Der Frequenzgang ist von größter Wichtigkeit für das Verständnis von LZI-Systemen. Bei der graphischen Darstellung geht es im Kern darum, die komplexwertige Größe $H(j\omega)$ als Funktion der Frequenz ω zu charakterisieren. Die offensichtlichste Möglichkeit wäre, Real- und Imaginärteil in getrennten Schaubildern darzustellen. Das ist zwar denkbar, allerdings lässt sich an dieser Darstellung das Systemverhalten nicht in einfacher Weise ablesen. Zwei günstigere Methoden zur graphischen Darstellung von $H(j\omega)$ sind die *Ortskurve* und das *Bode-Diagramm*, die im folgenden vorgestellt werden.

Ortskurve

Bei der Ortskurve der komplexwertigen Funktion $H(j\omega)$ wird für jeden Wert der unabhängigen Variablen ω der Funktionswert in der komplexen Ebene eingezeichnet. Wenn ω seinen Definitionsbereich durchläuft, entsteht eine Kurve in der komplexen Ebene, die sogenannte Ortskurve (auch *Nyquistdiagramm* genannt). Da ω hier die Interpretation einer Frequenz hat, ist es sinnvoll, als Definitionsbereich das Intervall $[0, \infty)$ zu nehmen.

Beispiel 3.9: Ortskurve eines RC-Tiefpass'

Der Frequenzgang eines RC-Tiefpasses ist

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} - j \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

wobei die Frequenz $\omega_c = 1/RC$ Grenzfrequenz genannt wird. Um die Ortskurve zu zeichnen ist es sinnvoll, drei Fälle zu betrachten:

$\omega \ll \omega_c$: In diesem Fall wird $H(j\omega)$ vom Realteil dominiert.

$$H(j\omega) \approx 1, \quad \phi(j\omega) \approx 0.$$

Physikalisch betrachtet wird die Eingangsspannung ohne signifikante Dämpfung oder Phasenverschiebung an den Ausgang weitergegeben.

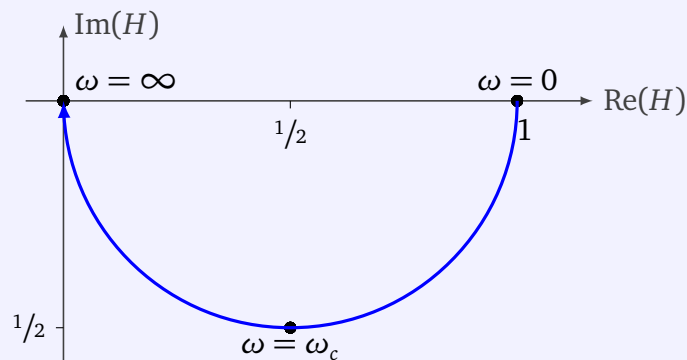
$\omega = \omega_c$: Dieser Fall unterscheidet zwischen hohen und niedrigen Frequenzen.

$$H(j\omega_c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j, \quad \phi(j\omega_c) = -\frac{\pi}{4}$$

$\omega \gg \omega_c$: In diesem Fall geht H gegen 0. Allerdings nähert sich der Realteil schneller der 0 an als der Imaginärteil. Das führt zu einer Phasenverschiebung von $-\pi/2$:

$$H(j\omega) \rightarrow 0, \quad \phi(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ für } \omega \rightarrow \infty.$$

Aus diesen drei Fällen lässt sich die Ortskurve konstruieren:



Bode-Diagramm

Im Bode-Diagramm werden Amplituden- und Phasengang auf der Frequenzachse aufgetragen, da diese beiden Größen nach Satz 3.9 direkt auf das Systemverhalten schließen lassen. In vielen Anwendungen kann der Amplitudengang allerdings sowohl große als auch sehr kleine Werte annehmen. Diese verschiedenen Größenordnungen lassen sich auf einer logarithmischen Skala besser als auf einer linearen Skala auflösen. Daher sei die logarithmische

Verstärkung definiert als:

$$A(j\omega) = 20 \text{ dB} \cdot \lg(|H(j\omega)|) \quad (3.27)$$

Unter dem üblichen Bode-Diagramm wird die Darstellung dieser Größe und des Phasengangs auf einer logarithmischen Frequenzachse verstanden.

Bemerkungen:

- Die Definition von $A(j\omega)$ ist nur sinnvoll, wenn der Frequenzgang $H(j\omega)$ eine dimensionslose Größe ist. Das ist nur dann der Fall, wenn Eingangs- und Ausgangssignal die gleiche physikalische Dimension haben.
- Die (Pseudo-)Einheit der logarithmischen Verstärkung $A(j\omega)$ ist *Dezibel* (dB). Der Faktor 20 erklärt sich aus der Tatsache, dass es sich bei den Eingangs- und Ausgangssignalen in der Regel um Spannungsgrößen (auch Feldgrößen genannt) und nicht um Leistungsgrößen handelt. Für letztere wird der Faktor 10 dB verwendet. Weitere Details finden sich unter [7].
- Wie an Gleichung (3.26) zu erkennen ist, verhält sich das logarithmische Verstärkungsmaß für große Frequenzen wie

$$A(j\omega) \approx 20 \lg(K \omega^{q-n}) \text{ dB.}$$

mit der Konstanten $K = |b_q/a_n|$. Wird die Frequenz um eine Dekade, also um den Faktor 10, erhöht, ändert sich das Verstärkungsmaß gemäß:

$$\begin{aligned} A(10 \cdot j\omega) &= 20 \lg(K(10 \cdot \omega)^{q-n}) \text{ dB} = 20(\lg(K \omega^{q-n}) + \lg(10^{q-n})) \text{ dB} \\ &= A(j\omega) + (q - n) \cdot 20 \text{ dB} \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

Satz 3.11: Für ein LZI-System mit Frequenzgang wie in Gleichung (3.24) ändert sich das logarithmische Verstärkungsmaß (3.27) für große Frequenzen um den Faktor

$$(q - n) \cdot 20 \text{ dB}$$

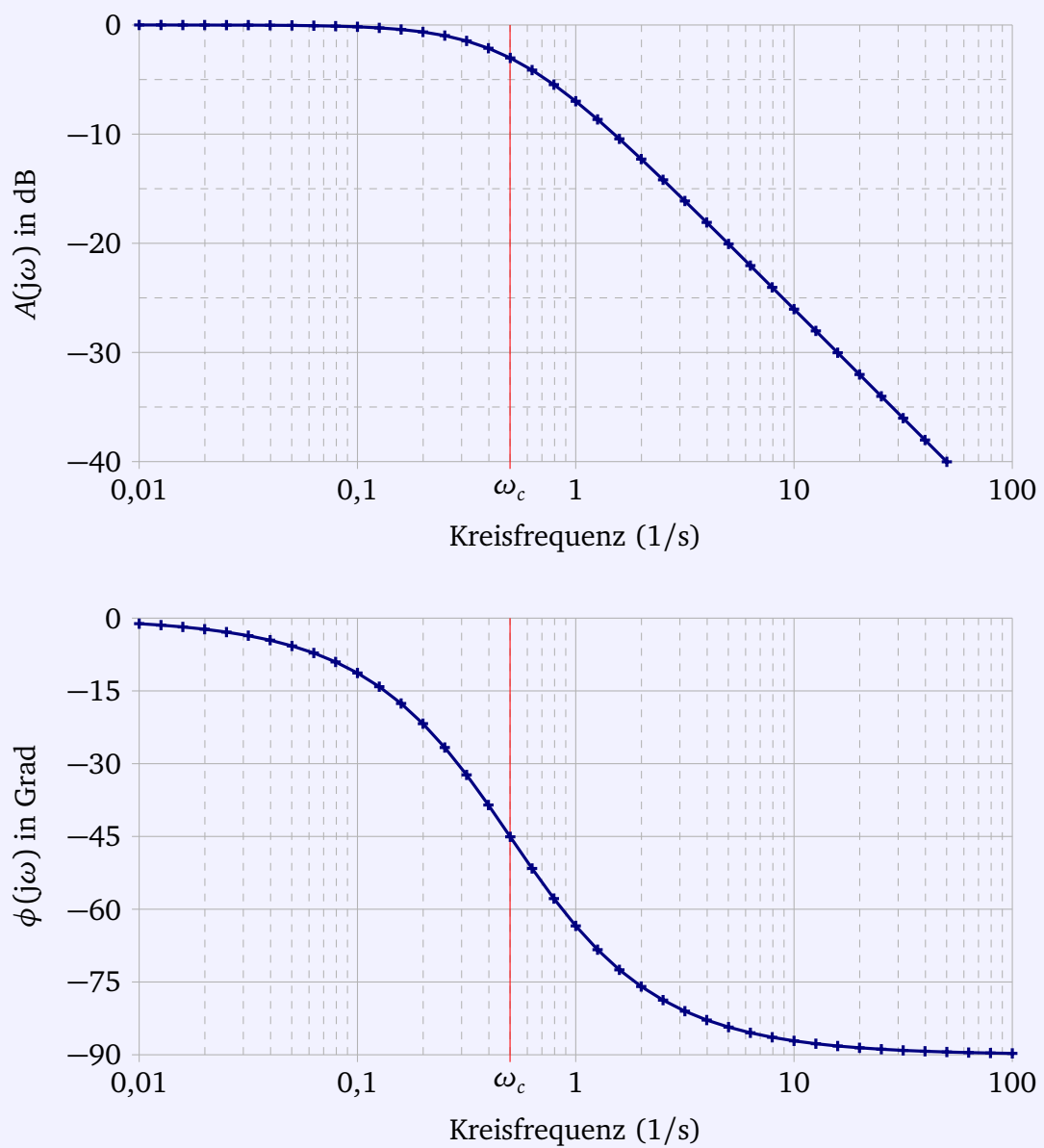
pro Dekade (d.h. wenn die Frequenz um den Faktor 10 erhöht wird).

Beispiel 3.10: RC-Tiefpass im Bode-Diagramm

Der Phasengang des RC-Tiefpasses wurde schon im vorigen Beispiel zur Ortskurve diskutiert. Für die logarithmische Verstärkung ergibt sich:

- $|H(j\omega = 0)| = 1 \Rightarrow A(j\omega = 0) = 0$
- $|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A(j\omega_c) = 20 \lg(2^{-1/2}) = -3 \text{ dB}$
- Für den RC-Tiefpass gilt $q = 0$ und $n = 1$. Daher fällt $A(j\omega)$ für Frequenzen deutlich über ω_c um 20dB pro Dekade ab.

Unterhalb der Grenzfrequenz ω_c kann das Signal das Filter praktisch unverändert passieren, wohingegen es oberhalb der Grenzfrequenz deutlich gedämpft wird. Das Tiefpass-Verhalten ist klar erkennbar. In dem hier gezeigten Bode-Diagramm wurde von einer Grenzfrequenz $\omega_c = 1 \text{ s}^{-1}$ ausgegangen.



Kapitel 4

Die Laplace-Transformation

4.1 Definition und Beispiele

Die bisherige Theorie hat einige Schwächen:

- Der Frequenzgang lässt sich zwar für ein beliebiges LZI-System gemäß Gleichung (3.24) leicht berechnen. Aber für die Berechnung der Impulsantwort $h(t)$ im Zeitbereich fehlt nach wie vor ein praktikables Rezept.
- Die Definition des Frequenzgangs als Fourier-Transformation (3.23) funktioniert nur, falls $h(t)$ für große t schnell genug abfällt. Für die wichtige Klasse von LZI-Systemen, für die $h(t)$ nicht entsprechend schnell abfällt (sogenannte instabile Systeme), divergiert das uneigentliche Integral.

Es wird sich herausstellen, dass sich diese Probleme lösen lassen, indem die Überlegung in Gleichung (3.21), die auf die Definition des Frequenzgangs führte, verallgemeinert wird. Ein Eingangssignal in der Form einer gedämpften oder ansteigenden Schwingung,

$$u(t) = e^{st} \text{ mit } s = \sigma + j\omega,$$

(siehe Gleichung (2.2)) führt für ein LZI-System mit Impulsantwort $h(t)$ auf das Ausgangssignal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-t')} h(t') dt' = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st'} h(t') dt'}_{H(s)} = H(s) \cdot e^{st}.$$

Das Integral zur Berechnung des Faktors $H(s)$ (die Übertragungsfunktion) ist also eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation und wird Laplace-Transformation genannt. Diese Transformation ist nicht nur für die Impulsantwort wichtig, sondern es wird allgemein definiert:

Definition 4.1 (Laplace-Transformation): Für eine komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$ heißt das Integral

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t) e^{-st} dt \quad (4.1)$$

die Laplace-Transformierte von $y(t)$.

Bemerkungen:

- Eine weit verbreitete Notation für die Laplace-Transformation ist

$$y(t) \circ \longrightarrow \bullet Y(s).$$

Es wird auch von "Darstellung des Signals im *Bildbereich*" gesprochen.

- Für oft verwendete Funktionen ist es nicht nötig, das Laplace-Integral explizit zu berechnen, sondern es können die Resultate aus Tabelle 4.1 verwendet werden.
- Im Gegensatz zur Fourier-Transformation wird die Laplace-Transformation in der Regel nur als Integral über die positive Zeitachse definiert (einseitige Laplace-Transformation). Für kausale Signale (also $y(t) = 0$ für $t < 0$), die in diesem Skript hauptsächlich betrachtet werden, ist dieser Unterschied allerdings unerheblich.
- Der Teil der komplexen Ebene, in dem das Integral (4.1) konvergiert, heißt das Konvergenzgebiet von $Y(s)$. Oft konvergiert das Laplace-Integral, wenn der Realteil von s nur groß genug ist, um den Integranden entsprechend zu dämpfen. In der Regel wird das Konvergenzgebiet also durch eine Bedingung der Form $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ beschrieben, wobei σ_0 eine reelle Zahl ist, die von der Form des Signals $y(t)$ abhängt. Wenn $Y(s)$ Pole in der komplexen Ebene hat, können diese Pole sicherlich nicht innerhalb des Konvergenzgebiets liegen. In diesem Fall ist σ_0 der Realteil des Pols von $Y(s)$ der am weitesten rechts in der komplexen Ebene liegt.
- Wenn für ein Signal $y(t)$ die imaginäre Achse Teil des Konvergenzgebiets ist (wenn also die Pole von $Y(s)$ alle in der linken Halbebene liegen), dann kann $s = j\omega$ gesetzt werden und wir erhalten die Fourier-Transformation. Dies zeigt, dass die Laplace-Transformation eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation ist.
- Für spitzfindige Leser: Mit der unteren Grenze 0^- ist der linksseitige Grenzwert gemeint:

$$\int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st} dt := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\infty} y(t)e^{-st} dt \quad \text{mit } \epsilon > 0 \quad (4.2)$$

Wenn $y(t)$ bei $t = 0$ stetig ist, ist es ohne Belang, dass dieser Grenzwert nur linksseitig ist. Wenn $y(t)$ allerdings eine Sprungstelle hat oder die δ -Funktion enthält, ist damit gemeint, dass die 0 vollständig im Integrationsbereich enthalten ist. Das wird z.B. hier benötigt:

$$\delta(t) \circ \longrightarrow \bullet = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Die Rücktransformation

Der Vorgang, für einen Ausdruck $Y(s)$ im Bildbereich das Signal $y(t)$ im Zeitbereich zu finden, wird *inverse Laplace-Transformation* oder auch *Rücktransformation* genannt. Es gibt eine Integraldarstellung ähnlich zu (4.1) für die Rücktransformation. Dieses Integral ist allerdings kompliziert anzuwenden, da nicht entlang der reellen Achse integriert wird. Daher wird die Integraldarstellung der Rücktransformation hier nicht behandelt. Sehr oft hat $Y(s)$ die Form einer gebrochen rationalen Funktion. In diesem Fall kann folgende Strategie zur Rücktransformation angewendet werden:

- 1.) Umformen von $Y(s)$, typischerweise Partialbruchzerlegung.
- 2.) Übergang in den Zeitbereich durch Nachschlagen in Tabelle 4.1.

Tabelle 4.1: Die Korrespondenztabelle wichtiger Laplace-Transformationen

Nr.	Signal	Laplace-Transformation	Konvergenzgebiet
(1)	$\delta(t)$	1	alle $s \in \mathbb{C}$
(2)	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
(3)	$\sigma(t) \cdot t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
(4)	$\sigma(t) \cdot e^{at}, a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$
(5)	$\sigma(t) \cdot t^n e^{at}, a \in \mathbb{C}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$
(6)	$\sigma(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
(7)	$\sigma(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
(8)	$\sigma(t) \cdot t \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
(9)	$\sigma(t) \cdot t \sin(\omega_0 t)$	$\frac{2s\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
(10)	$\sigma(t) \cdot e^{at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$
(11)	$\sigma(t) \cdot e^{at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$

Beispiel 4.1: Rücktransformation von $Y(s) = \frac{12s+9}{s(2s+3)^2}$

Die Funktion lässt sich nicht direkt in der Tabelle der Laplace-Transformationen finden. Mit den Nennernullstellen 0 und zweimal $3/2$ folgt für den Ansatz der Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3/2} + \frac{C}{(s+3/2)^2}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten folgt für die Konstanten A , B und C :

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 3/2$$

Damit können für die Rücktransformation die Zeilen (2), (4) und (5) (mit $n = 1$) der Tabelle angewendet werden:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3/2} + \frac{3/2}{(s+3/2)^2} \bullet \circ \sigma(t) \cdot \left(1 - e^{-3t/2} + \frac{3}{2}te^{-3t/2}\right). \quad (4.3)$$

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Viele Signale lassen sich transformieren, indem nicht explizit die Definition (4.1) angewendet wird, sondern die generellen Eigenschaften der Laplace-Transformationen, die im Folgenden aufgelistet werden.

Einfache Eigenschaften

Linearität: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zwei Signale. Dann gilt

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \circ \bullet \alpha Y_1(s) + \beta Y_2(s) \quad (4.4)$$

Beispiel 4.2: Linearität der Laplace-Transformation

$$3\delta(t) - 2\sigma(t) \circ \bullet 3 - \frac{2}{s} = \frac{3s - 2}{s}$$

Zeitverschiebung um t_0 mit einer vorgegebenen Zeitkonstanten $t_0 > 0$: Für ein kausales Signal $y(t)$ gilt

$$y(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0} Y(s) \quad (4.5)$$

Beweis: Da nach Voraussetzung $y(t)$ ein kausales Signal ist, gilt $y(t - t_0) = 0$ für $t < t_0$. Mit der Substitution $t' = t - t_0$ kann dann für das Laplace-Integral geschrieben werden:

$$y(t - t_0) \circ \bullet \int_{t_0}^{\infty} y(t - t_0) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} y(t') e^{-s(t'+t_0)} dt' = e^{-st_0} \underbrace{\int_0^{\infty} y(t') e^{-st'} dt'}_{Y(s)}$$

Beispiel 4.3: Transformation der verschobenen Sprungfunktion

$$\sigma(t - t_0) \circ \bullet \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-st_0} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Verschiebung im Bildbereich (Dämpfungssatz): Für ein vorgegebenes $s_0 \in \mathbb{C}$ gilt

$$y(t) e^{s_0 t} \circ \bullet Y(s - s_0) \quad (4.6)$$

$$\text{Beweis: } y(t) e^{s_0 t} \circ \bullet \int_0^{\infty} y(t) e^{s_0 t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} y(t) e^{-(s-s_0)t} dt = Y(s - s_0)$$

Beispiel 4.4: Gedämpfte Sprungfunktion

Die gedämpfte Sprungfunktion aus Zeile (4) der Transformationstabelle folgt aus Zeile (2) und dem Dämpfungssatz.

Der Faltungssatz

Faltungsintegrale sind entscheidend für die Beschreibung von LZI-Systemen im Zeitbereich. Eine ganz wesentliche Eigenschaft der Laplace-Transformation ist, dass es eine einfache Transformationsformel für Faltungsprodukte gilt:

Satz 4.2 (Faltungssatz): Für zwei kausale Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$ gilt

$$y_1 * y_2(t) \circ \bullet Y_1(s) \cdot Y_2(s). \quad (4.7)$$

Beweis: Für kausale Signale lässt sich der Integrationsbereich der Faltung einschränken und transformiert als

$$\begin{aligned} y_1 * y_2(t) &= \int_0^\infty y_1(t-t')y_2(t')dt' \circ \bullet \int_0^\infty \int_0^\infty y_1(t-t')y_2(t')dt'e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty y_2(t')e^{-st'} \underbrace{\int_0^\infty y_1(t-t')e^{-s(t-t')}dt}_{Y_1(s)} dt' = Y_1(s) \underbrace{\int_0^\infty y_2(t')e^{-st'}dt'}_{Y_2(s)}. \end{aligned}$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen wurde dabei die Reihenfolge der Integration vertauscht und der Faktor $1 = e^{-st'} \cdot e^{st'}$ eingefügt.

Beispiel 4.5: Anwendung des Faltungssatzes

Für die einseitige Exponentialfunktion mit reellem $a < 0$ gilt

$$y(t) = \sigma(t)e^{at} \circ \bullet Y(s) = \frac{1}{s-a}.$$

Andererseits gilt für die Faltung mit sich selbst (Übungsaufgabe)

$$y * y(t) = \sigma(t)te^{at} \circ \bullet \frac{1}{(s-a)^2} = Y(s)^2.$$

Der Ableitungssatz

Neben dem Faltungssatz ist die einfache Transformation der Ableitung $\dot{y}(t)$ eines Signals die zweite wesentliche Eigenschaft der Laplace-Transformation. Diese Eigenschaft wird es erlauben, die Differentialgleichung (3.4) ganz allgemein zu lösen.

Satz 4.3 (Ableitungssatz): Für ein kausales Signal $y(t)$ gilt

$$\dot{y}(t) \circ \bullet sY(s). \quad (4.8)$$

Beweis mit partieller Integration: Laut Produktregel gilt

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-st}) = \dot{y}(t)e^{-st} - y(t)se^{-st} \iff \dot{y}(t)e^{-st} = \frac{d}{dt}(y(t)e^{-st}) + y(t)se^{-st}.$$

Also lautet die Laplace-Transformation von $\dot{y}(t)$

$$\dot{y}(t) \circ \bullet \int_{0-}^\infty \dot{y}(t)e^{-st}dt = \int_{0-}^\infty \frac{d}{dt}(y(t)e^{-st})dt + \int_{0-}^\infty y(t)se^{-st}dt$$

$$= y(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + sY(s) = -y(0^-) + sY(s) = sY(s),$$

denn für kausale Signale ist der linksseitige Grenzwert $y(0^-) = 0$. Wie üblich wird dabei angenommen dass $\operatorname{Re}(s)$ genügend groß ist, so dass e^{-st} an der oberen Grenze ∞ verschwindet.

Bemerkungen:

- Der Ableitungssatz lässt sich ohne Weiteres auf höhere Ableitungen kausaler Signale erweitern:

$$y^{(n)}(t) \circ \bullet s^n Y(s) \quad (4.9)$$

- Wie vom Beweis zu erkennen ist, lautet der Ableitungssatz für *nicht-kausale* Signale

$$\dot{y}(t) \circ \bullet sY(s) - y(0^-) \quad (4.10)$$

mit dem linksseitigen Grenzwert $y(0^-)$ des Zeitsignals bei $t = 0$. Ebenfalls mit partieller Integration lassen sich analoge Ergebnisse für höhere Ableitung herleiten:

$$\ddot{y}(t) \circ \bullet s^2 Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) \quad (4.11)$$

$$\ddot{y}(t) \circ \bullet s^3 Y(s) - s^2 y(0^-) - s\dot{y}(0^-) - \ddot{y}(0^-)$$

und entsprechend für noch höhere Ableitungen. Diese Version des Ableitungssatzes ist wichtig für die Lösung von Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen, die sich von (3.5) unterscheiden.

Beispiel 4.6: Ableitung der Kosinusfunktion

Zeile (6) der Korrespondenztabelle lautet:

$$y(t) = \sigma(t) \cos(\omega_0 t) \circ \bullet Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Für die Ableitung von $y(t)$ ergibt sich mittels Produktregel und Ausblendeigenschaft:

$$\dot{y}(t) = \delta(t) - \omega_0 \sigma(t) \sin(\omega_0 t)$$

Die Laplace-Transformierte kann mittels Zeile (1) und (7) bestimmt werden:

$$\dot{y}(t) \circ \bullet 1 - \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2}$$

Letzteres ist die Laplace-Transformierte von $y(t)$ multipliziert mit s :

$$\dot{y}(t) \circ \bullet sY(s)$$

Aufgrund der Sprungfunktion ist $y(0^-) = 0$ könnte auch (4.8) angewendet werden, was zu einem identischen Ergebnis führt.

Beispiel 4.7: Federpendel ohne Reibung und ohne äußere Kraft

Die Schwingungsgleichung eines Federpendels mit Masse m und Federkonstante k , aber ohne Reibung und äußere Kraft, lautet

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0$$

und soll für die Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = 0$ gelöst werden. Dazu wird die Gleichung mit Hilfe von (4.11) transformiert

$$m(s^2 Y(s) - sy_0) + kY(s) = 0,$$

nach $Y(s)$ aufgelöst und mit Zeile (6) der Tabelle in den Zeitbereich zurück transformiert:

$$Y(s) = y_0 \frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}} \bullet \circ y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

Es wird deutlich, dass die Lösung hier kein kausales Signal ist, sondern für alle $t \in \mathbb{R}$ als Kosinus definiert ist.

Der Endwertsatz

Ausgangssignale von stabilen LZI-Systemen streben nach Abklingen von Einschwing- oder Ausgleichsvorgängen oft einen stationären Wert an. Mathematisch formuliert existiert also der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ und hat einen endlichen Wert. Dieser stationäre Wert lässt sich mit Hilfe der Laplace-Transformation leicht bestimmen mit dem

Satz 4.4 (Endwertsatz): Sofern die Grenzwerte existieren, gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (4.12)$$

Beweis mit Hilfe des Ableitungssatzes (4.10):

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_{0^-}^{\infty} \dot{y}(t) e^{-st} dt + y(0^-) \right) = \int_{0^-}^{\infty} \dot{y}(t) \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st}}_1 dt + y(0^-) \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \dot{y}(t) dt + y(0^-) = y(t) \Big|_{0^-}^{\infty} + y(0^-) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \end{aligned}$$

Beispiel 4.8: Endwertsatz

Für $Y(s) = \frac{12s + 9}{s(2s + 3)^2}$ ist

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{12s + 9}{(2s + 3)^2} = \frac{9}{3^2} = 1.$$

Daher muss $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$ gelten, was auch richtig ist, wie anhand der vollständigen Form von $y(t)$ in Gleichung (4.3) zu erkennen ist.

4.2 Übertragungsfunktion von LZI Systemen

Die Laplace-Transformierte der Impulsantwort heißt *Übertragungsfunktion*,

$$h(t) \circ \longrightarrow \bullet H(s),$$

und ist die zentrale Größe der Systemtheorie. Laplace-Transformation der allgemeinen Eingangs-Ausgangs-Beziehung im Zeitbereich $y(t) = h * u(t)$ mit Hilfe des Faltungssatzes (4.7) ergibt den

Satz 4.5: Für ein LZI-System mit Übertragungsfunktion $H(s)$ gilt die Eingangs-Ausgangs-Beziehung im Bildbereich

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s), \quad (4.13)$$

wobei $U(s)$ und $Y(s)$ die Laplace-Transformierten des Eingangssignals $u(t)$ und des Ausgangssignals $y(t)$ sind.

Der Wert dieses Ergebnisses liegt in der Tatsache, dass das in der Regel sehr komplizierte Faltungsintegral im Zeitbereich durch eine einfach durchzuführende Multiplikation im Bildbereich erledigt werden kann.

Beispiel 4.9: Laplace-Transformierte der Sprungantwort

Mit $\sigma(t) \circ \longrightarrow \bullet 1/s$ und (4.13) kann die Laplace-Transformierte der Sprungantwort ermittelt werden:

$$g(t) = h(t) * \sigma(t) \circ \longrightarrow \bullet H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{H(s)}{s} = G(s) \quad (4.14)$$

Falls für ein LZI-System eine Differentialgleichung der Form (3.4) mit den Anfangsbedingungen (3.5) vorliegt, kann die Übertragungsfunktion ganz ähnlich wie der Frequenzgang in Abschnitt 3.4 berechnet werden, indem die ganze Differentialgleichung mit Hilfe von

$$y^{(k)}(t) \circ \longrightarrow \bullet s^k Y(s), \quad u^{(k)}(t) \circ \longrightarrow \bullet s^k U(s)$$

(siehe Gleichung (4.8)) transformiert wird:

$$a_n s^n Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_q s^q U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

Jetzt liegt keine Differentialgleichung mehr vor, sondern eine einfache Gleichung, die sich ohne Weiteres nach $H(s) = Y(s)/U(s)$ auflösen lässt. Das führt zu

Satz 4.6 (Transformierte eines LZI-Systems): Ein durch die Differentialgleichung (3.4) beschriebenes LZI-System hat die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4.15)$$

Diese Übertragungsfunktion hat n Polstellen s_p . Diese Polstellen können nicht innerhalb des Konvergenzbereichs von $H(s)$ liegen. Es lässt sich zeigen, dass $H(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ rechts der Polstellen existiert, d.h. das Konvergenzgebiet hat die Form

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_p) \text{ für alle Pole } s_p \text{ von } H(s)\}.$$

Die obigen Resultate führen zu einer effizienten Berechnungsmethode des Ausgangssignals $y(t)$ eines LZI-Systems. Wenn die Übertragungsfunktion $H(s)$ und das Eingangssignal $u(t)$ gegeben sind, berechnet sich $y(t)$ gemäß folgender Vorschrift:

Satz 4.7 (Berechnung des Ausgangssignals $y(t)$):

Schritt 1: Berechnung der Laplace-Transformierten $U(s)$ (in der Regel per Tabelle).

Schritt 2: Berechnung von $Y(s) = H(s) \cdot U(s)$.

Schritt 3: Berechnung von $y(t)$ per Rücktransformation von $Y(s)$ (evtl. mit voriger Partialbruchzerlegung).

Dieses Rezept kann in verschiedenen Varianten angewandt werden. Sind etwa $y(t)$ und $u(t)$ gegeben, kann daraus die Übertragungsfunktion nach Laplace-Transformation mit $H(s) = Y(s)/U(s)$ bestimmt werden.

Beispiel 4.10: Impuls- und Sprungantwort für einen RC-Tiefpass

Beispiel: Der RC-Tiefpass mit Differentialgleichung $RC \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$ hat die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{sRC + 1}$$

Impuls- und Sprungantwort lassen sich mit inverser Laplace-Transformation berechnen:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{sRC + 1} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s + 1/RC} \bullet \circ h(t) = \frac{1}{RC} \sigma(t) e^{-t/RC} \\ G(s) &= H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(sRC + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC} \\ \bullet \circ g(t) &= \sigma(t) - \sigma(t) e^{-t/RC} = \sigma(t) (1 - e^{-t/RC}), \end{aligned}$$

was mit den Ergebnissen in (3.12) übereinstimmt.

Der stationäre Wert der Sprungantwort und $H(0)$

Für ein Eingangssignal, das irgendwann einen konstanten Wert u_{stat} annimmt, pendelt sich das Ausgangssignal eines stabilen LZI-Systems auch auf einem stationären Wert y_{stat} ein. Da in diesem stationären Grenzfall alle Ableitungen verschwinden, vereinfacht sich die Differentialgleichung (3.4) zu

$$a_0 y_{\text{stat}} = b_0 u_{\text{stat}} \iff \frac{y_{\text{stat}}}{u_{\text{stat}}} = \frac{b_0}{a_0} = H(s=0).$$

Die Übertragungsfunktion am Ursprung wird entsprechend *Gleichspannungsverstärkung* (engl. *DC-gain*) genannt. Besonders einfach ist die Situation für die Sprungantwort, denn die Sprungfunktion am Eingang hat für $t > 0$ den konstanten Wert $u_{\text{stat}} = 1$. Damit ergibt sich

Satz 4.8 (Stationäres Verhalten der Sprungantwort): Wenn sich die Sprungantwort auf einen stationären Wert einpendelt, ist dieser durch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \frac{b_0}{a_0} = H(0) \quad (4.16)$$

gegeben.

Eine alternative Herleitung des stationären Verhaltens der Sprungantwort ergibt sich aus dem Endwertsatz (4.12),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{sG(s)}_{H(s)} = H(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

wobei der Zusammenhang (4.14) zwischen der Übertragungsfunktion $H(s)$ und der Laplace-Transformation $G(s)$ der Sprungantwort benutzt wurde.

Dieses Ergebnis lässt sich auch aus der Sicht des Frequenzbereichs verstehen. Ein konstantes Signal u_{stat} kann als $u_{\text{stat}} = u_{\text{stat}} \cdot \cos(0 \cdot t)$, also harmonische Schwingung mit Frequenz 0 betrachtet werden. Nach der Einschwingzeit wird das Signal entsprechend mit dem Frequenzgang bei 0, also $H(0)$ verstärkt. Besonders leicht lässt sich der Punkt $H(0)$ im Nyquistdiagramm als Beginn der Ortskurve ablesen.

4.3 Stabilität von LZI-Systemen/Pol-Nullstellen-Diagramme

Mit dem Begriff der *Stabilität* werden Systeme charakterisiert, die nicht außer Kontrolle geraten können, weil das Ausgangssignal zu stark ansteigt.

Ein Signal $y(t)$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Schranke $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$|y(t)| < M \quad \text{für alle } t.$$

Definition 4.9 (BIBO-Stabilität): Ein LZI heißt BIBO-stabil, wenn ein beschränktes Eingangssignal zu einem beschränkten Ausgangssignal führt. *BIBO* steht dabei für 'bounded input - bounded output'.

Es gibt auch andere Möglichkeiten, das Konzept der Stabilität einzuführen, daher der Zusatz BIBO. Wenn im Folgenden von Stabilität die Rede ist, ist immer BIBO-Stabilität gemeint.

Stabilität und Impulsantwort

Definition 4.9 ist anschaulich plausibel und gut geeignet, um zu erkennen, ob ein System instabil ist: Es muss nur ein Eingangssignal gefunden werden, für das das Ausgangssignal divergiert. Da die Sprungfunktion beschränkt ist, ist ein System z.B. instabil, wenn die Sprungantwort divergiert. Es gibt allerdings eine alternative Charakterisierung der Stabilität mit Hilfe der Impulsantwort, die einfacher anzuwenden ist, wenn die Stabilität eines Systems nachgewiesen werden soll:

Satz 4.10 (Stabilitätskriterium im Zeitbereich): Ein LZI-System ist genau dann stabil, wenn die Impulsantwort $h(t)$ absolut integrierbar ist, wenn also gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (4.17)$$

Beweis: In Kurzform lautet der Satz: System stabil $\iff \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$. Daher müssen beide Richtungen der Äquivalenz bewiesen werden.

" $\Rightarrow$ ": Für einen festen Zeitpunkt $\tau > 0$ werde das Eingangssignal $u(t) = \text{sgn}(h(\tau - t))$ betrachtet. Dabei ist $\text{sgn}(x) = \pm 1$ oder 0 je nach Vorzeichen von x die Signumfunktion und erfüllt die Beziehung $f(x) \cdot \text{sgn}(f(x)) = |f(x)|$. Da das Eingangssignal $u(t)$ beschränkt und das System stabil ist, ist auch das Ausgangssignal beschränkt:

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - t) \text{sgn}(h(\tau - t)) dt = \int_0^{\tau} |h(\tau - t)| dt = \int_0^{\tau} |h(t)| dt$$

Im Grenzwert $\tau \rightarrow \infty$ folgt daraus, dass die Impulsantwort absolut integrierbar ist.

" $\Leftarrow$ ": Jetzt sind die Voraussetzungen, dass $h(t)$ integrierbar ist, und dass das Eingangssignal beschränkt ist. Es gibt also zwei Konstanten M_1 und M_2 so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < M_1, \quad |u(t)| < M_2.$$

Dann gilt für das Ausgangssignal

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t') u(t') dt' \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - t')| |u(t')| dt' \\ &\leq M_2 \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - t')| dt' = M_2 \int_{-\infty}^{\infty} |h(t')| dt' \leq M_2 M_1, \end{aligned}$$

d.h. es ist beschränkt. Das System ist also stabil.

Beispiel 4.11: Stabilität des RC-Tiefpasses

Der RC-Tiefpass mit Impulsantwort aus (3.12) ist stabil, denn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} e^{-t/RC} dt = -e^{-t/RC} \Big|_0^{\infty} = 1 < \infty$$

Bemerkungen:

- Anschaulich lässt sich dieses Stabilitätskriterium folgendermaßen verstehen. Damit die Impulsantwort $h(t)$ integrierbar ist, muss sie für große Zeiten gegen 0 streben. Da $h(t)$ die Systemantwort auf eine kurze, heftige Anregung bei $t = 0$ ist, kann das System nur dann zur Ruhelage 0 zurückkehren, wenn es eine rücktreibende Kraft wie etwa bei einem Federpendel gibt. Ohne rücktreibende Kraft kann ein LZI-System nicht stabil sein.
- In Abschnitt 3.4 wurde der Frequenzgang nur für stabile Systeme definiert. Das lässt sich nun durch folgende Abschätzung begründen. Sei $h(t)$ die Impulsantwort eines stabilen Systems. Dann gilt für den Frequenzgang

$$|H(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_1 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

Für stabile Systeme ist das Fourier-Integral (3.23) des Frequenzgangs also konvergent und damit sinnvoll definiert.

Stabilität und Übertragungsfunktion

Auch im Bildbereich lässt sich ein Kriterium zur Beurteilung der Stabilität eines LZI-Systems entwickeln. Gleichung (4.15) zeigt, dass die Übertragungsfunktion eine gebrochen rationale Funktion des komplexen Parameters s ist und mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung als Summe über die einzelnen Polstellen geschrieben werden kann. Gemäß Zeile (5) in der Tabelle mit Laplace-Transformationen trägt ein Pol der Ordnung n an der Stelle a den Term

$$\sigma(t)t^{n-1}e^{at} = \sigma(t)t^{n-1}e^{\alpha t}e^{j\beta t}$$

mit $\alpha = \operatorname{Re}(a)$ und $\beta = \operatorname{Im}(a)$ bei. Unabhängig von der Polordnung n ist dieser Term genau dann absolut integrierbar, wenn $\alpha < 0$ ist. Aus Gleichung (4.17) folgt damit

Satz 4.11 (Stabilitätskriterium im Bildbereich): Ein LZI-System ist genau dann stabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion negativen Realteil haben, also in der linken Halbebene liegen.

Beispiel 4.12: Stabilität des RC-Tiefpasses

Der RC-Tiefpass hat die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

und damit den Pol bei $-1/RC < 0$ in der linken Halbebene. Daher ist das System stabil.

Bemerkungen:

- Ein System mit Pol auf der imaginären Achse ist instabil. Der Beitrag eines solchen Pols zur Impulsantwort steigt zwar nicht exponentiell an, fällt aber auch nicht auf 0 ab und ist daher nicht absolut integrierbar. Ein solches System wird auch *grenzstabil* genannt.
- Auch dieses Stabilitätskriterium steht im Zusammenhang mit der Existenz des Frequenzgangs, der sich ergibt, wenn die Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse, d.h. für $s = j\omega$, ausgewertet wird. Dies ist allerdings nur dann möglich, wenn die imaginäre Achse im Konvergenzgebiet der Übertragungsfunktion liegt. Das ist genau dann der Fall, wenn die Pole in der linken Halbebene liegen, denn das Konvergenzgebiet ist der Teil der komplexen Ebene, der rechts der Pole liegt.

Das Hurwitz-Kriterium

Für $n = 1$ und $n = 2$ gibt es ein einfaches, von Hurwitz entwickeltes Kriterium, um die Lage der Polstellen und damit die Stabilität eines Systems zu bestimmen:

Satz 4.12 (Hurwitz-Kriterium): Ein LZI-System der Ordnung $n = 1$ oder $n = 2$ ist genau dann stabil, wenn alle Koeffizienten strikt positiv sind, d.h. wenn gilt:

$$a_k > 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n. \quad (4.18)$$

Dieses Kriterium lässt sich auch auf Systeme höherer Ordnung verallgemeinern, ist dann aber etwas umständlich zu formulieren und anzuwenden. Heutzutage ist es günstiger, für Systeme der Ordnung $n > 2$ die Lage der Pole direkt mit dem Computer zu berechnen.

Das Pol-Nullstellen-Diagramm

Die Polstellen der Übertragungsfunktion (4.15) sind für die Beurteilung des Systemverhaltens von größter Wichtigkeit. Daher ist es praktisch, die Lage der Pol- und Nullstellen in der komplexen s -Ebene im sogenannten *Pol-Nullstellen-Diagramm* (auch *PN-Diagramm* genannt) graphisch darzustellen. Ein Beispiel ist in Abbildung 4.1. Wichtige Eigenschaften des PN-Diagramms sind:

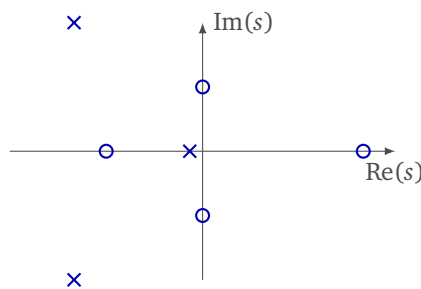


Abbildung 4.1: Nullstellen (○) und Pole (×) einer Übertragungsfunktion $H(s)$.

- 1.) $H(s)$ hat q Nullstellen $s_{N1}, s_{N2}, \dots, s_{Nq}$ und n Polstellen $s_{p1}, s_{p2}, \dots, s_{pn}$. Zerlegung der Zähler- und Nennerpolynome in Linearfaktoren führt zur *zpk-Darstellung* der Übertragungsfunktion

$$H(s) = K \cdot \frac{(s - s_{N1}) \cdot (s - s_{N2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{Nq})}{(s - s_{p1}) \cdot (s - s_{p2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{pn})} \quad (4.19)$$

mit dem Vorfaktor $K = b_q/a_n$.

- 2.) Bis auf den Vorfaktor K ist die Übertragungsfunktion durch das PN-Diagramm eindeutig festgelegt.
- 3.) Die Koeffizienten a_k und b_k sind in der Regel reell. Daher sind die Pol- und Nullstellen
 - entweder reell
 - oder bilden komplex konjugierte Paare.

Das PN-Diagramm ist daher symmetrisch bezüglich Spiegelung an der reellen Achse.

- 4.) Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung kann $H(s)$ als Summe über die einzelnen Pole geschrieben werden. Nach Rücktransformation wird das gesamte Systemverhalten, also als die Summe des Verhaltens der einzelnen Polstellen, deutlich. Das den einfachen Polen entsprechende Zeitverhalten der Impulsantwort $h(t)$ ist in Anhang A zusammengefasst.
- 5.) Ein Pol mit negativem Realteil $\alpha < 0$ führt zu einem Term $e^{\alpha t}$ in der Impulsantwort. Das heißt, der Abstand von der imaginären Achse bestimmt das Dämpfungsverhalten

des Systems. Für ein stabiles System repräsentieren die Pole, die am dichtesten an der imaginären Achse liegen, den Teil der Impulsantwort, der am wenigsten gedämpft wird und daher das Zeitverhalten des Systems außer für sehr kleine Zeiten dominiert. Diese Pole heißen daher *dominante Pole*.

4.4 Beispiele einfacher LZI-Glieder

In diesem Abschnitt werden ein paar einfache LZI-Glieder unter ihrem in der Automatisierungstechnik üblichen Namen vorgestellt. Für die sehr wichtigen PT1- und PT2-Glieder wird außerdem die *Systemidentifikation* diskutiert. Dabei handelt es sich um die Aufgabe, aus einer gemessenen Systemantwort (oft die Sprungantwort) die Parameter des Systems zu bestimmen.

Totzeitglied

Es handelt sich um ein System, welches das Eingangssignal um die Zeitkonstante T verzögert:

$$y(t) = u(t - T) \quad (4.20)$$

Impuls- und Sprungantwort sind entsprechend die verzögerten Impuls- und Sprungantworten:

$$h(t) = \delta(t - T), \quad g(t) = \sigma(t - T)$$

Das Totzeitglied ist das einzige LZI-Glied, welches nicht durch eine Differentialgleichung beschrieben werden kann. Entsprechend kann Gleichung (4.15) zur Bestimmung der Übertragungsfunktion nicht verwendet werden, sondern es muss das Laplace-Integral explizit ausgeführt werden:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \delta(t - T)e^{-st} dt = e^{-sT}.$$

Entsprechend ist das Totzeitglied das einzige LZI-Glied, dessen Übertragungsfunktion keine gebrochen rationale Funktion in s ist.

P-Glied

Das P-Glied verstärkt das Eingangssignal $u(t)$ um einen konstanten Faktor K_p :

$$y(t) = K_p u(t) \quad (4.21)$$

Die Übertragungsfunktion $H(s) = K_p$ hat keine Pole in der rechten Halbebene. Daher ist das P-Glied stabil. Impuls- und Sprungantwort sind

$$h(t) = K_p \delta(t), \quad g(t) = K_p \sigma(t).$$

Das P-Glied wird auch *Gain* genannt und oft für Regeleinrichtungen benutzt.

I-Glied

Hierbei handelt es sich um einen Integrator:

$$\dot{y}(t) = K_I u(t) \quad (4.22)$$

Mit der Anfangsbedingung $y(t < 0) = 0$ lässt sich diese Gleichung auch als

$$y(t) = K_I \int_0^t u(t') dt'$$

schreiben, daher der Name Integrator. Die Übertragungsfunktion $H(s) = K_I/s$ hat einen Pol im Ursprung (Zeile (3) in Anhang A), daher ist das System grenzstabil. Impuls- und Sprungantwort sind

$$h(t) = K_I \sigma(t), \quad g(t) = K_I \sigma(t) \cdot t$$

Genau wie das P-Glied wird das I-Glied oft für Regeleinrichtungen benutzt.

PT1-Glied

Hierbei wird das P-Glied um einen Ableitungsterm des Ausgangssignals erweitert:

$$T \dot{y}(t) + y(t) = K_p u(t) \quad (4.23)$$

Der Parameter T ist aus Dimensionsgründen eine Zeitkonstante und wird als positiv angenommen. Ein konkretes Beispiel für ein PT1-Glied ist der RC-Tiefpass, siehe (1.1). Die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{K_p}{Ts + 1}$$

hat einen einfachen Pol auf der negativen, reellen Achse bei $-1/T$ (Zeile (2) im Anhang A). Die Impuls- und Sprungantwort eines PT1-Gliedes lauten

$$h(t) = \frac{K_p}{T} \sigma(t) e^{-t/T}, \quad g(t) = K_p \sigma(t) (1 - e^{-t/T})$$

Systemidentifikation: Die Parameter K_p und T lassen sich anhand der Sprungantwort bestimmen, siehe Abbildung 4.2:

- K_p ist der stationäre Grenzwert der Sprungantwort.
- Für $t = T$ ergibt sich $g(T) = K_p(1 - e) \approx 63\% \cdot K_p$. Die Zeitkonstante T lässt sich also als der Zeitpunkt bestimmen, bei dem die Sprungantwort 63% ihres maximalen Werts angenommen hat (auch als 63%-Regel bekannt).
- Alternative Bestimmung der Zeitkonstanten T :
 - Steigung des Graphen im Ursprung: $\dot{g}(0) = \frac{K_p}{T}$
 - Zeichnen einer Tangente im Koordinatenursprung
 - Beim Schnittpunkt mit $y = K_p$ Zeichnen einer Senkrechten
 - Der Schnittpunkt mit der Abszisse bezeichnet die Zeitkonstante T

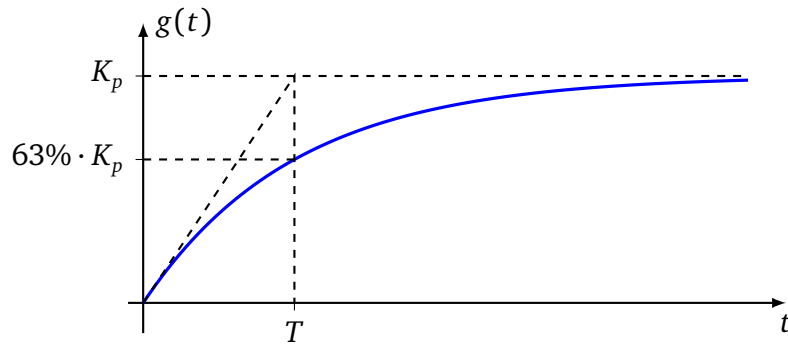


Abbildung 4.2: Sprungantwort eines PT1-Glieds

IT1-Glied

Beim IT1-Glied wird das I-Glied um einen Ableitungsterm des Ausgangssignals erweitert:

$$T \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K_I u(t) \quad (4.24)$$

Der Parameter T ist aus Dimensionsgründen eine Zeitkonstante und wird als positiv angenommen. Ein konkretes Beispiel für ein IT1-Glied ist das Flugzeug-Modell in Gleichung (3.1). Die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{K_I}{s(Ts + 1)}$$

hat Pole im Ursprung und bei $-1/T$, von daher ist das System grenzstabil. Die Impulsantwort lautet.

$$h(t) = K_I \sigma(t) (1 - e^{-t/T})$$

und hat die gleiche Form wie die Sprungantwort des PT1-Gliedes. Die Systemidentifikation eines IT1-Gliedes kann also analog zur Systemidentifikation eines PT1-Gliedes vorgenommen werden, wenn die Impulsantwort bekannt ist.

PT2-Glied

Beim PT2-Glied wird das PT1-Glied um einen Ableitungsterm des Ausgangssignals erweitert:

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K_p u(t) \quad (4.25)$$

Sowohl T_1 als auch T_2 sind Zeitkonstanten. Für die Analyse der Polstellen der Übertragungsfunktion ist es allerdings günstig, diese Standardform des PT2-Gliedes etwas anders zu parametrisieren:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{y}(t) + \frac{2d}{\omega_0} \dot{y}(t) + y(t) = K_p u(t)$$

mit der ungedämpften Eigenfrequenz ω_0 und der dimensionslosen Dämpfungskonstante d , definiert als

$$\omega_0 = \frac{1}{T_2}, \quad d = \frac{T_1}{2T_2}.$$

Die Übertragungsfunktion lautet

$$H(s) = \frac{K_p}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2d \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{K_p \omega_0^2}{s^2 + 2d \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.26)$$

und hat Polstellen bei

$$s_{\pm} = -d\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1}.$$

Für $d > 0$ liegen diese Pole in der linken Halbebene, das PT2-System ist also stabil. Je nachdem, ob $d^2 - 1$ negativ oder positiv ist, ergeben sich komplex konjugierte oder rein reelle Polstellen mit oder ohne Schwingungsverhalten. Diese Situationen werden in einer Fallunterscheidung separat diskutiert.

Starke Dämpfung ($d > 1$): Die beiden Polstellen sind in diesem Fall rein reell. Die Impulsantwort lautet

$$h(t) = \sigma(t) \frac{K_p \omega_0}{2\sqrt{d^2 - 1}} (e^{s_+ t} - e^{s_- t}).$$

Jegliches Schwingungsverhalten wird durch die starke Dämpfung unterdrückt. Dieser Fall wird daher *Kriechfall* genannt, siehe Abbildung 4.3.

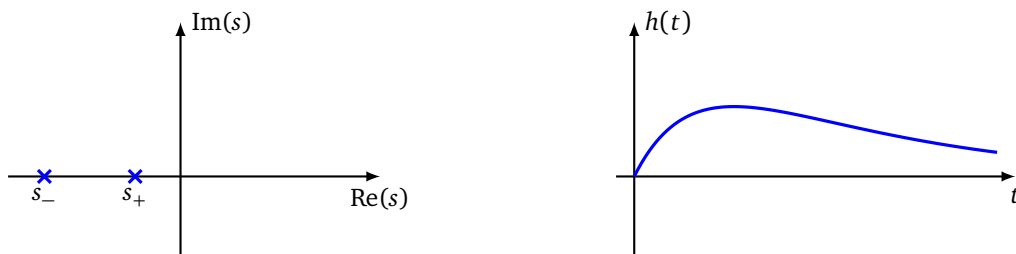


Abbildung 4.3: Pole und Impulsantwort eines PT2-Gliedes im Fall starker Dämpfung (Kriechfall).

Geringe Dämpfung ($d < 1$): Die Polstellen sind in diesem Fall komplex konjugiert (Zeile (5) im Anhang A) und lauten

$$s_{\pm} = -d\omega_0 \pm j \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - d^2}}_{\omega_e} = -d\omega_0 \pm j\omega_e$$

mit der gedämpften Eigenfrequenz

$$\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - d^2} < \omega_0. \quad (4.27)$$

Als Impulsantwort ergibt sich

$$h(t) = \sigma(t) \frac{K_p \omega_0}{\sqrt{1 - d^2}} e^{-d\omega_0 t} \sin(\omega_e t)$$

und zeigt das zu erwartende gedämpfte Schwingungsverhalten mit einer gegenüber der ungedämpften Eigenfrequenz ω_0 reduzierten Frequenz ω_e . Für geringe Dämpfung unterscheiden sich ω_0 und ω_e allerdings kaum. Der Dämpfungsfaktor ist durch den Realteil der Pole gegeben, siehe Abbildung 4.4. Es wird vom *Schwingfall* gesprochen.

Der Abstand der Pole vom Ursprung beträgt:

$$|s_{\pm}| = \sqrt{d^2 \omega_0^2 + \omega_e^2} = \omega_0.$$

Der Dämpfungsfaktor d ist durch den Winkel φ_d bestimmt:

$$\cos(\varphi_d) = d$$

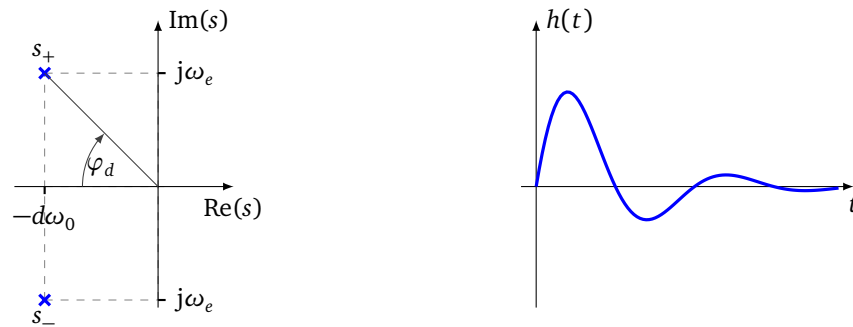


Abbildung 4.4: Pole von $H(s)$ und Impulsantwort eines PT2-Gliedes im Fall geringer Dämpfung (Schwingfall).

Systemidentifikation im Fall schwacher Dämpfung: (Vgl. Abschnitt 3.3.3 in [2]) Die inverse Laplace-Transformation von $G(s) = H(s)/s$ führt nach einiger Rechnung auf die Sprungantwort

$$g(t) = K_p \sigma(t) \left(1 - e^{-\omega_0 dt} \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \cos(\omega_e t + \varphi) \right)$$

mit $\omega_e = \omega_0 \sqrt{1-d^2}$ und einer für diese Zwecke unwichtigen Phasenverschiebung φ .

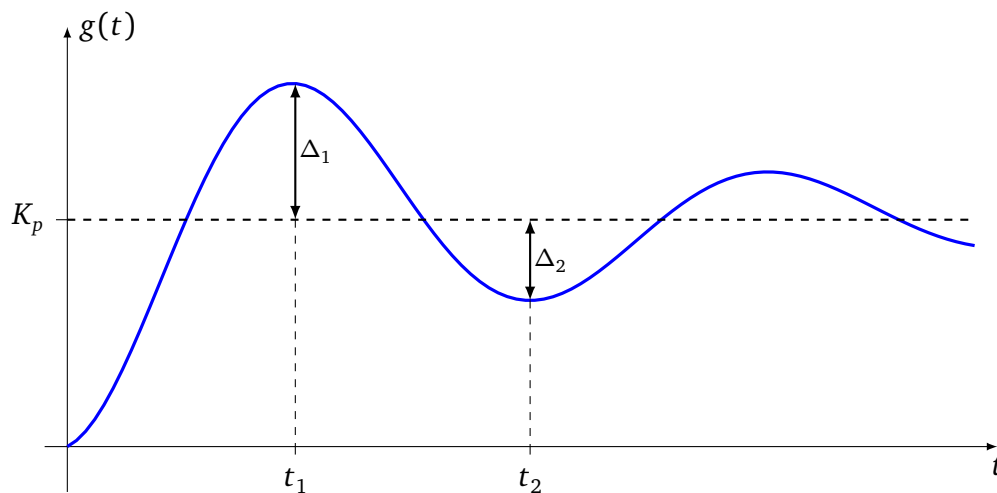


Abbildung 4.5: Sprungantwort eines PT2-Gliedes (nicht maßstabsgetreu)

Zur Systemidentifikation werden zunächst die Zeitpunkte t_1 und t_2 des ersten Maximums und Minimums der Sprungantwort sowie die Abstände Δ_1 und Δ_2 vom stationären Grenzwert abgelesen, siehe Abbildung 4.5. Die Parameter K_p , ω_0 und d können dann anhand dieser Werte folgendermaßen bestimmt werden:

- K_p ist der stationäre Grenzwert der Sprungantwort.
- Die Dämpfungskonstante d ergibt sich als

$$d = \sqrt{\frac{\theta^2}{\theta^2 + \pi^2}} \quad \text{mit} \quad \theta := \ln\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)$$

- Die Eigenfrequenz ω_0 ergibt sich als

$$\omega_0 = \frac{\pi}{(t_2 - t_1)\sqrt{1-d^2}}$$

Herleitung: Offensichtlich ist die zur Schwingungsfrequenz ω_e gehörende Periode durch

$$T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = 2(t_2 - t_1)$$

gegeben. Die Abweichungen vom stationären Grenzwert K_p der Sprungantwort sind durch den Teil

$$-e^{-\omega_0 d t} \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \cos(\omega_e t + \varphi)$$

der Sprungantwort gegeben. Zu den Zeiten t_1 und t_2 muss der Kosinus also die Werte -1 und 1 annehmen. Das führt auf

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= e^{-\omega_0 d t_1} \frac{1}{\sqrt{1-d^2}}, & \Delta_2 &= e^{-\omega_0 d t_2} \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta_1}{\Delta_2} &= e^{-\omega_0 d (t_1 - t_2)} \Leftrightarrow \theta := \ln\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right) = \omega_0 d (t_2 - t_1) = \omega_0 d T_e / 2. \end{aligned}$$

Mit $\omega_0 T_e = \omega_e T_e / \sqrt{1-d^2} = 2\pi\sqrt{1-d^2}$ ergibt sich

$$\theta = \frac{\pi d}{\sqrt{1-d^2}} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{\theta^2}{\theta^2 + \pi^2}}.$$

Frequenzbereich: Der Frequenzgang des PT2-Glieds ergibt sich, indem die Übertragungsfunktion (4.26) für $s = j\omega$ ausgewertet wird:

$$H(j\omega) = \frac{K_p}{j^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2dj \frac{\omega}{\omega_0} + 1} = \frac{K_p \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2dj\omega\omega_0}. \quad (4.28)$$

Für das Bode-Diagramm wird das System wie üblich für kleine und große Frequenzen sowie bei der Eigenfrequenz betrachtet:

- Für kleine Frequenzen $\omega \ll \omega_0$ lässt sich der Frequenzgang annähern durch

$$H(j\omega) \approx K_p \Rightarrow \phi(j\omega) \approx 0$$

- Bei der Eigenfrequenz ω_0 gilt

$$H(j\omega_0) = -j \frac{K_p}{2d} \Rightarrow \phi(j\omega_0) = -\pi/2.$$

Für kleine Werte von d führt das auf eine starke Verstärkung des Eingangssignals. Diesen Effekt wird *Resonanz* genannt.

- Für große Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ gilt

$$H(j\omega) \approx -\frac{K_p \omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \phi(j\omega) \approx -\pi,$$

so dass das Verstärkungsmaß $A(j\omega)$ wie erwartet um -40 dB pro Dekade abfällt.

Tiefe Frequenzen können also das System passieren, wohingegen hohe Frequenzen unterdrückt werden. Es handelt sich um einen Tiefpass.

Der Resonanzbereich: Die Resonanzfrequenz ist als die Frequenz definiert, bei welcher der Amplitudengang ein Maximum annimmt. Um dieses Maximum zu bestimmen, ist es am einfachsten, das Minimum des Nenners des Quadrates des Amplitudengangs (4.28) zu bestimmen:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{K_p^2 \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2 \omega^2 \omega_0^2}$$

Der Nenner hat nicht bei der Eigenfrequenz ω_0 , sondern bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2d^2} \quad (4.29)$$

sein Minimum hat. Das entsprechende Maximum des Amplitudengangs ist

$$|H(j\omega_{\text{res}})| = \frac{K_p}{2d \sqrt{1 - d^2}} \quad (4.30)$$

und wird auch *Resonanzüberhöhung* genannt. Daran wird Folgendes deutlich:

- Die Resonanzfrequenz ist etwas kleiner als die ungedämpfte Eigenfrequenz ω_0 des Systems. Bei schwach gedämpften Systemen ist dieser Unterschied allerdings nur sehr gering.
- Je größer die Dämpfung, desto geringer die Resonanzfrequenz und desto geringer die Resonanzüberhöhung. Resonanz lässt sich durch Erhöhung der Dämpfung abmildern.
- Für $d \geq 1/\sqrt{2}$ hat der Amplitudengang kein Maximum und es tritt keine Resonanz auf.

Die Notation PT1, IT1, PT2, etc. könnte auch auf Systeme höherer Ordnung ausgeweitet werden. In der Regel werden aber Systeme höherer Ordnung als Reihenschaltung von Systemen niedrigerer Ordnung betrachtet.

4.5 Kopplung von LZI-Gliedern

Komplexe Systeme lassen sich oft als Kombination einfacher LZI-Systeme verstehen. Die Kopplung zwischen den einzelnen Systemen führt zu einem System gekoppelter Differentialgleichungen im Zeitbereich bzw. auf ein lineares Gleichungssystem im Bildbereich. Für bestimmte Arten der Kopplung, die im Folgenden aufgelistet werden, lässt sich die Situation auch einfacher beschreiben.

Reihenschaltung

Für die rückkopplungsfreie Reihenschaltung zweier LZI-Glieder lautet der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

$$y(t) = h_2 * h_1 * u(t) \implies Y(s) = H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot U(s),$$

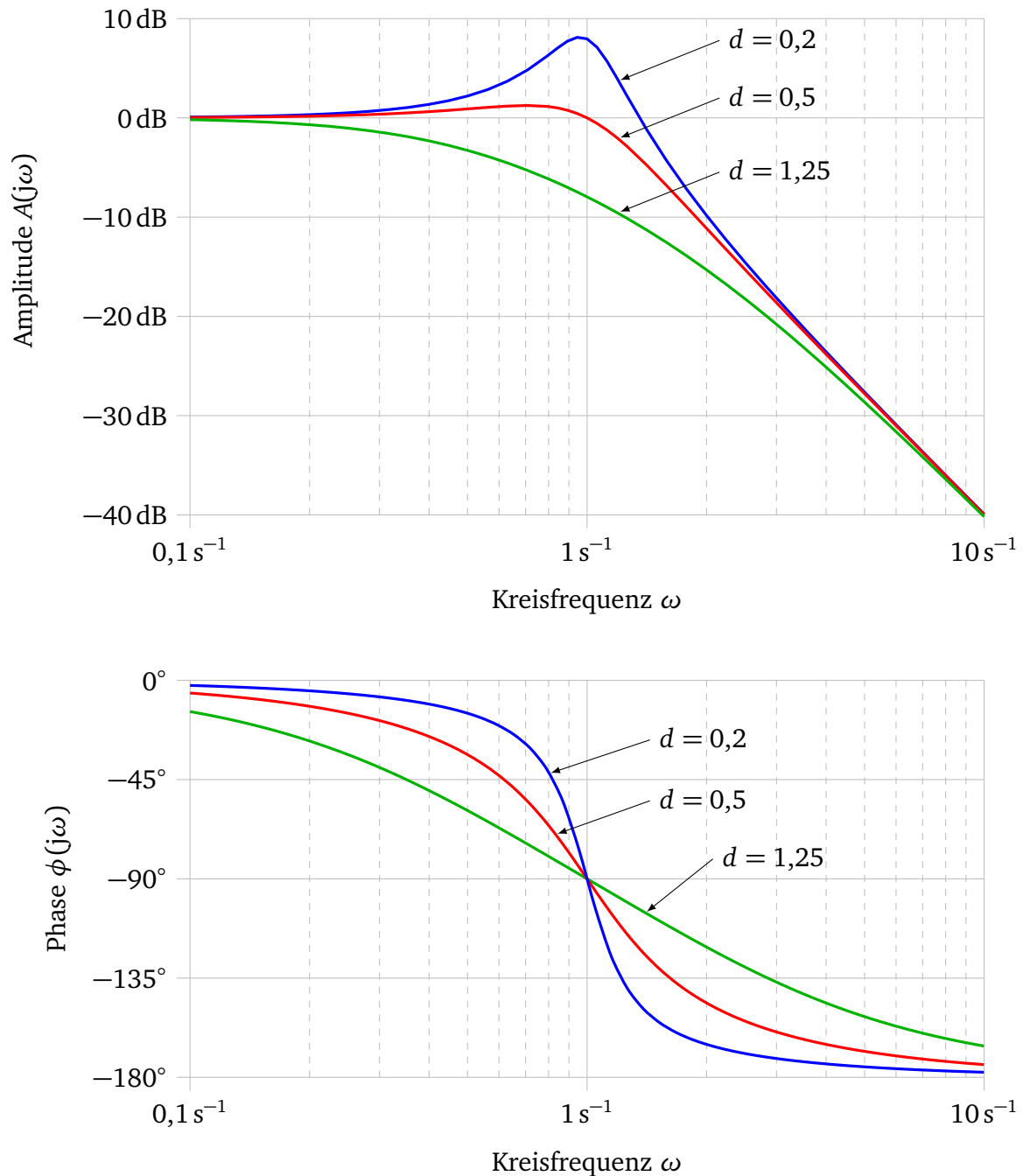


Abbildung 4.6: Bode-Diagramm eines PT2-Gliedes mit $\omega_0 = 1 s^{-1}$ für drei Dämpfungskoeffizienten d .

wobei h_1 und h_2 die Impulsantworten der Systeme S_1 und S_2 sind.
Auflösen nach $Y(s)/U(s) = H(s)$ führt auf den

Satz 4.13 (Reihenschaltung zweier LZI-Systeme): Die Übertragungsfunktion $H(s)$ einer Reihenschaltung zweier LZI-Glieder mit Übertragungsfunktionen $H_1(s)$ und $H_2(s)$ ist

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s). \quad (4.31)$$

Insbesondere addieren sich bei Reihenschaltung die Systemordnungen.

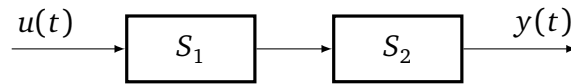


Abbildung 4.7: Reihenschaltung zweier LZI-Systeme

Für den Frequenzgang ergibt sich

$$H(j\omega) = |H_1(j\omega)|e^{j\phi_1(j\omega)} \cdot |H_2(j\omega)|e^{j\phi_2(j\omega)} = |H_2(j\omega)| \cdot |H_1(j\omega)| \cdot e^{j(\phi_1(j\omega)+\phi_2(j\omega))},$$

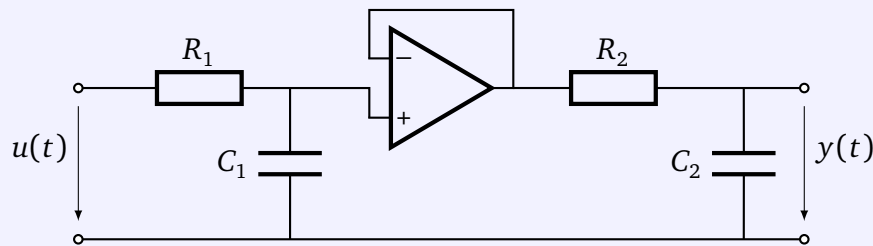
was zeigt, dass sich die Phasengänge addieren. Das gleiche Resultat ergibt sich nach Logarithmieren für das Verstärkungsmaß:

$$\phi(j\omega) = \phi_1(j\omega) + \phi_2(j\omega), \quad A(j\omega) = A_1(j\omega) + A_2(j\omega)$$

Das Bode-Diagramm einer Reihenschaltung kann also durch graphische Addition der Bode-Diagramme der einzelnen LZI-Glieder gezeichnet werden.

Beispiel 4.13: Reihenschaltung von zwei RC-Tiefpässen ohne Rückkopplung

Wir betrachten zwei in Reihe geschaltete RC-Tiefpässe. Um eine Rückkopplung zu vermeiden, wird zwischen die beiden Pässe ein Impedanzwandler eingefügt:



Die beiden Tiefpässe haben die Übertragungsfunktionen:

$$H_1(s) = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \quad H_2(s) = \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$

Für die gesamte Übertragungsfunktion $H(s)$ folgt:

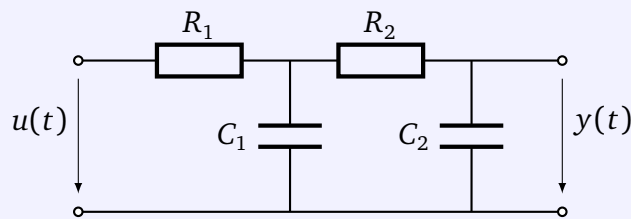
$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) s + 1}$$

Mit den beiden Zeitkonstanten $\tau_1 = R_1 C_1$ und $\tau_2 = R_2 C_2$ ergibt sich etwas kompakter:

$$H(s) = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1}$$

Beispiel 4.14: Reihenschaltung von zwei RC-Tiefpässen mit Rückkopplung

Wir betrachten zwei in Reihe geschaltete RC-Tiefpässe. Im Gegensatz zum vorigen Beispiel wird hier kein Operationsverstärker zwischen die beiden RC-Glieder und damit eine Rückkopplung zugelassen:



Bei dieser Schaltung kann (4.32) nicht angewendet werden. Nach Anwendung der allgemeinen Regeln der Elektrotechnik ergibt sich die Übertragungsfunktion mit:

$$H(s) = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$$

Mit den beiden Zeitkonstanten $\tau_1 = R_1 C_1$ und $\tau_2 = R_2 C_2$ ergibt sich etwas kompakter:

$$H(s) = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

Im Vergleich zur entkoppelten Reihenschaltung von zwei RC-Tiefpässen im vorigen Beispiel taucht hier im Nenner der zusätzliche Summand $R_1 C_2 s$ auf.

Parallelschaltung

Für die Parallelschaltung zweier LZI-Glieder lautet der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

$$y(t) = (h_1 + h_2) * u(t) \implies Y(s) = (H_1(s) + H_2(s)) \cdot U(s).$$

Es wird davon ausgegangen, dass sich die beiden Systeme gegenseitig nicht beeinflussen.

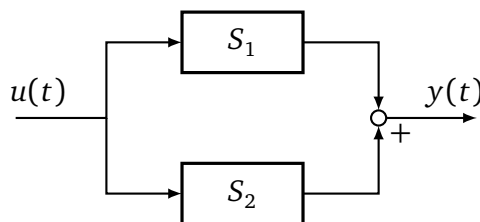


Abbildung 4.8: Parallelschaltung zweier LZI-Glieder

Auflösen nach $Y(s)/U(s) = H(s)$ führt auf den

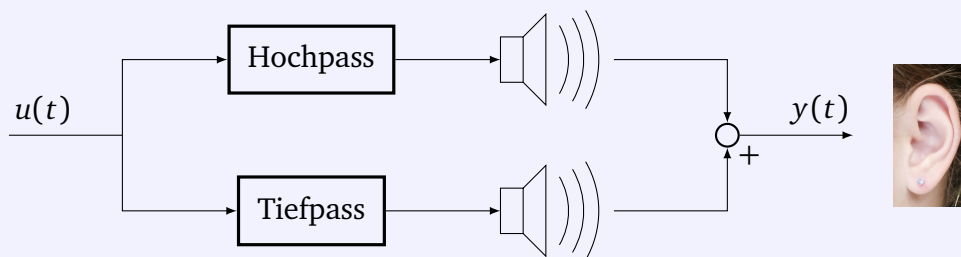
Satz 4.14 (Parallelschaltung): Die Übertragungsfunktion $H(s)$ der Parallelschaltung zweier LZI-Glieder mit Übertragungsfunktionen $H_1(s)$ und $H_2(s)$ ist

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s). \quad (4.32)$$

Beispiel 4.15: Zweibandlautsprecher

In einem Lautsprecher werden häufig zwei Chassis verarbeitet: Ein großes Chassis für die tiefen und ein kleineres für die hohen Frequenzen. Dabei muss sicher gestellt werden, dass beide Chassis mit getrennten Frequenzbändern versorgt werden und der Übergangsbereich weder höhere noch niedrigere Amplituden erzeugt. Zu diesem Zweck ist eine Frequenzweiche bestehend aus Hoch- und Tiefpass vorgesehen.

Ein solcher Lautsprecher verhält sich wie die Parallelschaltung von zwei Systemen, bei dem sich die Ausgangssignale der beiden Chassis in der Umgebungsluft addieren.



Rückkopplungsschleife

Für die negative Rückkopplungsschleife zweier LZI-Glieder lautet der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

$$y(t) = h_1 * u(t) - h_1 * h_2 * y(t).$$

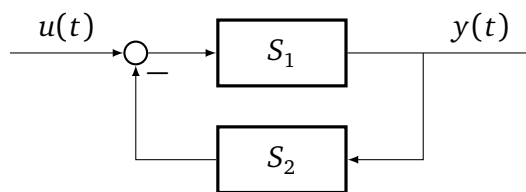


Abbildung 4.9: Negative Rückkopplungsschleife mit LZI-System S_1 im Vorwärtszweig und LZI-System S_2 im Rückführzweig.

Diese Relation lässt sich im Zeitbereich nicht nach $y(t)$ auflösen. Daher wird in den Bildbereich gewechselt und es ergibt sich

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s) \cdot U(s) - H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot Y(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)} U(s). \end{aligned}$$

Auflösen nach $Y(s)/U(s) = H(s)$ führt auf den

Satz 4.15 (Rückkopplungsschleife): Die Übertragungsfunktion $H(s)$ der Rückkopplungsschleife mit Übertragungsfunktionen $H_1(s)$ im Vorwärtszweig und $H_2(s)$ im Rückführzweig ist

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)}. \quad (4.33)$$

4.6 Einfache Regelkreise und Wurzelortskurve

Ein geregeltes System

Mit den bisher behandelten Methoden lässt sich untersuchen, wie ein LZI-System mit Hilfe eines Reglers kontrolliert werden kann, d.h. wie erreicht werden kann, dass sich das Ausgangssignal des Systems wie eine vorgegebene Führungsgröße verhält. Das zu regelnde System wird auch *Regelstrecke* genannt. Dabei handelt es sich oft um ein instabiles System, das durch die Regelung stabilisiert werden soll. Die Grundidee ist dabei, das Ausgangssignal der Regelstrecke zurückzuführen und die Differenz zur Führungsgröße als Eingangssignal für den Regler zu verwenden, der wiederum eine Stellgröße für die Strecke generiert. Das führt auf folgende Rückkopplungsschleife:

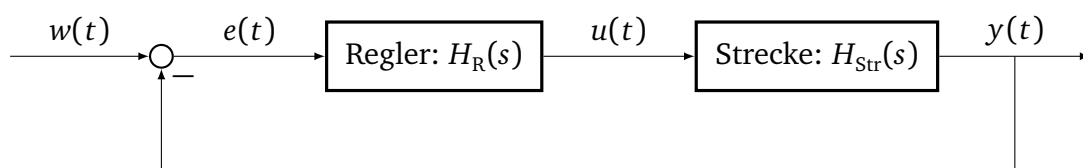


Abbildung 4.10: Grundstruktur eines Regelkreises.

- $w(t)$ heißt *Führungsgröße* (oder auch *Sollwert*) und gibt vor, welches Signal am Ausgang der Regelstrecke gewünscht ist.
- $y(t)$ heißt *Regelgröße* (oder auch *Istwert*) und soll der Führungsgröße möglichst genau folgen. Unter dem Führungsverhalten des Regelkreises wird verstanden, wie gut dieses Ziel erreicht wird.
- $e(t) = w(t) - y(t)$ heißt *Regeldifferenz*. Je kleiner die Regeldifferenz, desto besser ist das Führungsverhalten. Der stationäre Grenzwert

$$e_{\infty} := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

wird auch *bleibende Regeldifferenz* genannt.

- $u(t)$ heißt *Stellgröße*. Anhand der Regeldifferenz erzeugt der Regler eine Stellgröße, mit der die Regelstrecke beeinflusst wird.

Übertragungsfunktion eines geregelten Systems

Mit $H_1(s) = H_R(s) \cdot H_{Str}(s) = H_O(s)$ und $H_2(s) = 1$ lässt sich aus Satz 4.15 die Übertragungsfunktion eines geregelten Systems herleiten:

Satz 4.16 (Geregeltes System): Die Übertragungsfunktion eines geregelten Systems (auch Führungsübertragungsfunktion genannt) mit offener Kette $H_O(s) = H_R(s) \cdot H_{Str}(s)$ lautet:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{H_O(s)}{1 + H_O(s)} \quad (4.34)$$

Dabei heißt $H_O(s)$ die Übertragungsfunktion der offenen Kette, welche sich ergibt, wenn der Rückföhrungsweig des Regelkreises unterbrochen wird.

An dieser allgemeinen Gleichung kann bereits folgendes abgelesen werden: Für ein gutes Führungsverhalten wird erwartet, dass die Regeldifferenz zumindest im eingeschwungenen Zustand verschwindet. Andernfalls wird davon gesprochen, der Regelkreis habe eine bleibende Regeldifferenz e_∞ . Die Sprungantwort des Regelkreises sollte also im stationären Grenzfall gegen 1 gehen. Mit Gleichung (4.16) gilt aber

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \begin{cases} \frac{H_O(0)}{1+H_O(0)} \neq 1 & \text{falls } |H_O(0)| < \infty \\ 1 & \text{falls } \lim_{s \rightarrow 0} |H_O(s)| = \infty \end{cases}$$

Zusammengefasst gilt also

Satz 4.17: Nur wenn die offene Kette eines Regelkreises I-Verhalten zeigt, also bei $s = 0$ eine Polstelle hat, verschwindet die bleibende Regeldifferenz: $e_\infty = 0$

Elementare Regler

Die Hauptaufgabe der Regelungstechnik besteht darin, einen passenden Regler zu finden, so dass das Gesamtsystem stabil ist und ein spezifiziertes Führungsverhalten erreicht wird. Unter Führungsverhalten wird dabei verstanden, wie genau die Regelgröße $y(t)$ der Führungsgröße $w(t)$ folgt. Als Regler haben sich folgende Strukturen bewährt:

P-Regler: Dabei handelt es sich um ein einfaches P-Glied wie in Gleichung (4.21) beschrieben.

PI-Regler: Hier handelt es sich um eine Parallelschaltung aus P- und I-Glied mit Übertragungsfunktion

$$H_{PI}(s) = K_p + \frac{K_I}{s}.$$

PID-Regler: Darunter wird eine Parallelschaltung aus PI-Regler und einem Differenzierglied verstanden, das in dieser Vorlesung nicht weiter behandelt wird.

Wurzelortskurve

Mit der *Wurzelortskurve* wird die Darstellung der Polstellen der Übertragungsfunktion (??) des Regelkreises in Abhängigkeit der Parameter des Reglers bezeichnet. Mit der Interpretation der Polstellen wie in Anhang A lässt sich damit die Stabilität, sowie das Dämpfungs- und Schwingungsverhalten des Regelkreises in Abhängigkeit der Reglerparameter ablesen. Da die Wurzelortskurve für mehrere Parameter schnell unübersichtlich wird, wird hier nur der Fall eines P-Reglers diskutiert. Die Übertragungsfunktion des Regelkreises lautet in diesem Fall

$$H(s) = \frac{K_p \cdot H_{\text{Str}}(s)}{1 + K_p \cdot H_{\text{Str}}(s)}.$$

Die Pole der Übertragungsfunktion ergeben sich als Lösung der Gleichung

$$H_{\text{Str}}(s) = -\frac{1}{K_p}. \quad (4.35)$$

Daran lassen sich einige allgemeine Eigenschaften der Wurzelortskurve für einen P-Regler ablesen:

- Die Wurzelortskurve besitzt für jeden Pol von $H_{\text{Str}}(s)$ einen Zweig.
- Für $K_p \rightarrow 0$ geht die rechte Seite von Gleichung (4.35) gegen ∞ . Daher erreicht die Wurzelortskurve für $K_p \rightarrow 0$ die Polstellen von $H_{\text{Str}}(s)$.
- Für $K_p \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite von Gleichung (4.35) gegen 0. In diesem Fall gibt es zwei Möglichkeiten:
 - entweder erreicht die Wurzelortskurve eine der q Nullstellen von $H_{\text{Str}}(s)$,
 - oder die Wurzelortskurve läuft nach ∞ (in welche Richtung auch immer), denn für technisch realisierbare Systeme (Systemordnung $n > q$) geht $H_{\text{Str}}(s) \rightarrow 0$ für $s \rightarrow \infty$.

Für eine Regelstrecke ohne Nullstellen laufen also alle Zweige der Wurzelortskurve nach ∞ .

- Verzweigungspunkte der Wurzelortskurve treten bei mehrfachen Nullstellen des Nenners $1 + K_p \cdot H_{\text{Str}}(s)$ der Übertragungsfunktion des Regelkreises auf.

Beispiel 4.16: Regelung der Rollbewegung eines Flugzeuges

Gemäß Abbildung 1.1 und der Differentialgleichung (3.1) ergibt sich für die Übertragungsfunktion der Strecke ein IT1-Glied:

$$H_{\text{Str}}(s) = \frac{K}{s^2 + \gamma s}$$

Wegen des I-Anteils der Strecke bietet sich ein P-Regler an. Die Übertragungsfunktion des Regelkreises zeigt PT2-Verhalten:

$$H(s) = \frac{K_p \cdot \frac{K}{s^2 + \gamma s}}{1 + K_p \cdot \frac{K}{s^2 + \gamma s}} = \frac{K_p \cdot K}{s^2 + \gamma s + K_p \cdot K},$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium, Gleichung (4.18), ist das System für alle $K_p > 0$ stabil. Die beiden Pole des Regelkreises

$$s_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - K_p \cdot K}$$

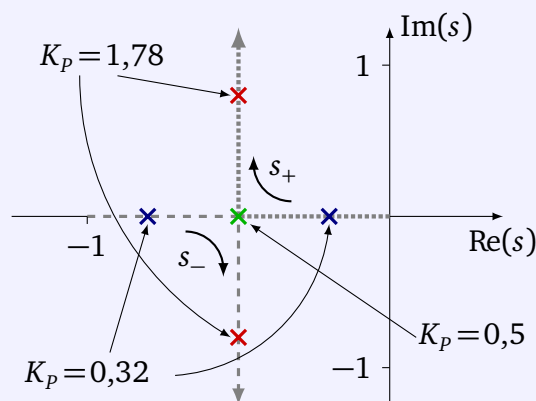
lassen folgende Schlüsse zu:

Kriechfall: Für $0 < K_p < \frac{\gamma^2}{4K}$ sind beide Pole reell und negativ. Das Gesamtsystem zeigt keine Überschinger.

Schwingungsfall: Für $K_p > \frac{\gamma^2}{4K}$ haben beide Pole einen Imaginärteil von $\sqrt{K_p \cdot K - \gamma^2/4}$. Das Gesamtsystem fängt an zu schwingen, und zwar umso stärker, je größer K_p gewählt wird.

Grenzfall: Für $K_p = \frac{\gamma^2}{4K}$ hat die Übertragungsfunktion eine doppelte Polstelle bei $-\gamma/2$. Dies ist der Verzweigungspunkt der Wurzelortskurve.

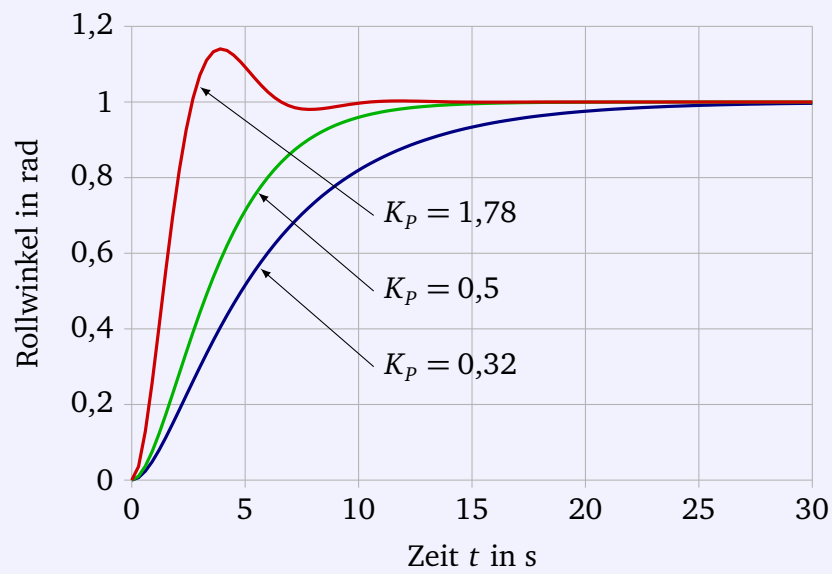
Für $\gamma = 1$ und $K = 0,5$ erhalten wir folgende Wurzelortskurve:



Die Wurzelortskurve besteht aus zwei Zweigen:

- Der Zweig der s_+ -Polstelle (gestrichelt dargestellt) fängt für $K_p = 0$ im Ursprung an, läuft für wachsendes K_p dann bis zum Verzweigungspunkt auf der reellen Achse, um dann mit wachsendem, positiven Imaginärteil ins Unendliche zu laufen.
- Der Zweig der s_- -Polstelle (gepunktet dargestellt) fängt für $K_p = 0$ bei $-\gamma$ an, läuft für wachsendes K_p dann ebenfalls bis zum Verzweigungspunkt auf der reellen Achse, um dann mit wachsendem, negativen Imaginärteil ins Unendliche zu laufen.

Unten sind die Sprungantworten für drei Werte von K_p dargestellt. Für K_p unterhalb des Verzweigungspunktes $\frac{\gamma^2}{4K} = 1/2$ nähert sich die Sprungantwort dem stationären Wert nur von unten an, wohingegen sich für $K_p > 1/2$ ein Überschwingen ergibt, das mit wachsendem K_p ansteigt.



Kapitel 5

Zustandsraumdarstellung und Signalflussdiagramme

5.1 Definition der Zustandsraumdarstellung

In der Regelungstechnik reicht die einfache Eingangs-Ausgangsbeziehung im Blockdiagramm oft nicht aus (Abbildung 5.1), da das Ausgangssignal nicht vollständig auf den inneren Zustand des Systems schließen lässt. So kann die Regelung in Abbildung 1.1 nur den Rollwinkel $y(t)$, nicht aber die Winkelgeschwindigkeit $\dot{y}(t)$ verwenden.

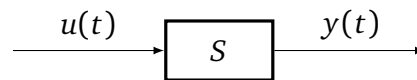


Abbildung 5.1: System S mit Eingangssignal $u(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$.

Die Idee der Zustandsraumdarstellung ist, nicht das Ausgangssignal $y(t)$ sondern einen Satz von Zustandsgrößen $x_1(t), \dots, x_n(t)$, die den Systemzustand zu jedem Zeitpunkt vollständig beschreiben, in den Mittelpunkt der Betrachtungen zu stellen. Das Ausgangssignal kann dann als einfache Linearkombination der Zustandsgrößen berechnet werden.

Bei dem Flugzeugmodell, beschrieben durch (3.1), bilden der Rollwinkel $y(t) = x_1(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{y}(t) = x_2(t)$ einen vollständigen Satz von Zustandsgrößen. Das wird daran deutlich, dass sich das Ausgangssignal mit der Differentialgleichung anhand des Eingangssignals und der Anfangswerte der Zustandsgrößen eindeutig bestimmen lässt.

Ganz allgemein werden Systemzustände folgendermaßen definiert¹:

Definition 5.1 (Zustandsgrößen eines LZI-Systems): Ein $n \times 1$ Spaltenvektor

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

heißt Zustandsvektor eines LZI-Systems der Ordnung n , wenn das Ausgangssignal $y(t)$ des Systems durch das Eingangssignal und den Anfangswert $\vec{x}(0)$ des Zustandsvektors eindeutig bestimmt ist.

¹Siehe Abschnitt 4.3.2 in [3].

Diese Definition ist sehr allgemein. Entsprechend ist es nicht überraschend, dass die Definition der Zustandsgrößen nicht eindeutig ist. Oft liegt eine physikalisch sinnvolle Definition der Zustandsgrößen, wie etwa Ort und Geschwindigkeit bei mechanischen Systemen oder Spannung und Strom bei elektrischen Systemen, nahe. Aber für jede reguläre $n \times n$ Matrix $\mathbf{M}$ liefert die Linearkombination

$$\vec{z}(t) = \mathbf{M} \cdot \vec{x}(t)$$

eines gegebenen Satzes von Zustandsgrößen $\vec{x}(t)$ einen weiteren, gültigen Satz von Zustandsgrößen $\vec{z}(t)$.

Die Differentialgleichung (3.4) eines LZI-Systems der Ordnung n kann dann immer in ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung für die Zustandsgrößen umformuliert werden.

Satz 5.2 (Zustandsraumdarstellung): Ein LZI-System der Ordnung n mit Eingangssignal $u(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ lässt sich durch ein System von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b} u(t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = \vec{c}^T \cdot \vec{x}(t) + d u(t) \quad (5.2)$$

beschreiben. Dabei ist $\vec{x}(t)$ ein $n \times 1$ Spaltenvektor von geeignet gewählten Systemzuständen, $\mathbf{A}$ die $n \times n$ Systemmatrix, $\vec{b}$ ein $n \times 1$ Spaltenvektor, $\vec{c}$ ebenfalls ein $n \times 1$ Spaltenvektor und d ein Skalar.

Bemerkungen:

- Im Gegensatz zur Differentialgleichung (3.4) und entsprechend der Übertragungsfunktion (4.15) ist die Zustandsraumdarstellung nicht eindeutig, da ja auch die Wahl der Zustandsgrößen $x(t)$ nicht eindeutig ist.
- Die Zustandsraumdarstellung ist nicht nur in der Regelungstechnik wichtig. Alle Methoden zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen (auch nicht-linearen) beruhen auf der Umformulierung als System von Gleichungen erster Ordnung.

Beispiel 5.1: Zustandsraumdarstellung des Flugzeugmodells

Das Flugzeugmodell aus der Einleitung hat die Differentialgleichung:

$$\ddot{y}(t) + \gamma \dot{y}(t) = K u(t)$$

Für das Flugzeugmodell (3.1) können z.B. die Zustandsgrößen

$$x_1(t) := y(t), \quad x_2(t) := \dot{y}(t)$$

gewählt werden. Aus dieser Definition folgt direkt:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

Einsetzen dieser Gleichung in die Differentialgleichung ergibt die zweite Gleichung:

$$\dot{x}_2(t) = -\gamma x_2(t) + K u(t)$$

Zusammengefasst in Matrixform folgt:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b} u(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} \\ y(t) &= \vec{c}^T \cdot \vec{x}(t) + d u(t) \quad \text{mit} \quad \vec{c}^T = (1, 0) \quad \text{und} \quad d = 0.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Darstellung als Signalflussdiagramm

Ein weiterer Vorteil der Zustandsraumdarstellung ist die Möglichkeit der Darstellung als *Signalflussdiagramm*, bestehend aus drei Elementen, siehe Abbildung 5.2. Dabei wird für je-

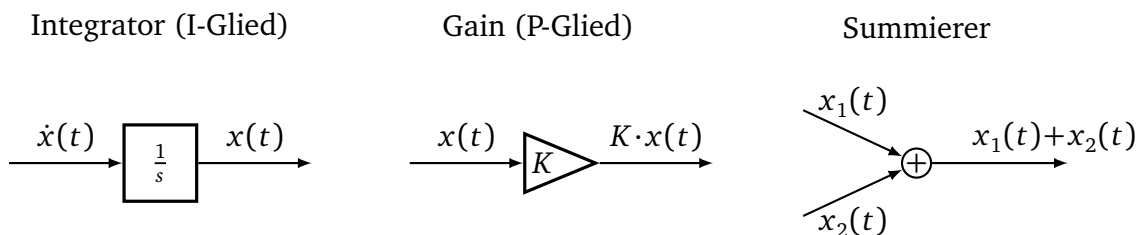


Abbildung 5.2: Drei Elemente für Signalflussdiagramme.

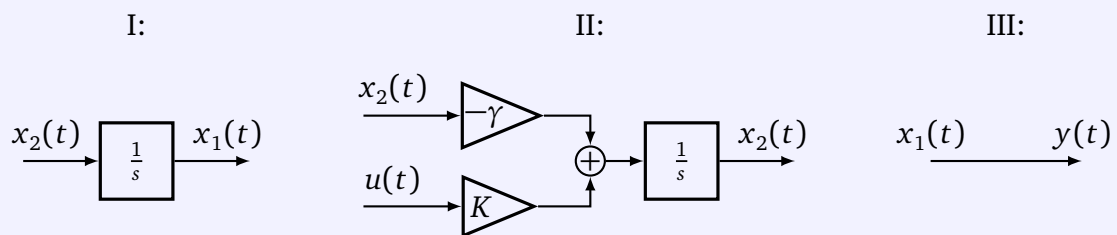
de Zustandsgröße genau ein Integrator benötigt. Die rechte Seite der Differentialgleichung $\dot{x}_k(t) = \dots$ muss mit Hilfe von Gain-Blöcken und Summierern aus den Zustandsgrößen $x_1, \dots, x_n$ aufgebaut werden und als Eingang in den Integrator für x_k geschickt werden.

Beispiel 5.2: Signalflussdiagramm des Flugzeugmodells

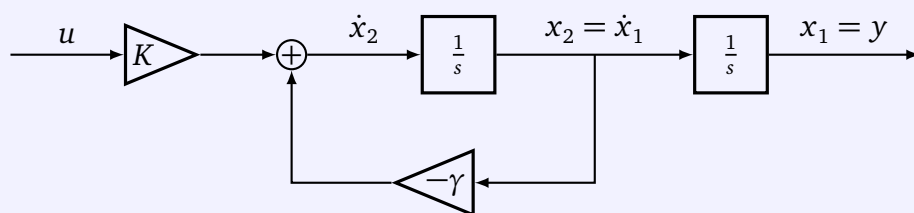
Im vorigen Beispiel wurden für das Flugzeugmodell folgende Gleichungen hergeleitet:

$$\text{I: } \dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \text{II: } \dot{x}_2(t) = -\gamma x_2(t) + Ku(t) \quad \text{III: } y(t) = x_1(t)$$

Es ergeben sich folgende Teildiagramme:



Zusammengefügt in ein Diagramm:



5.2 Aufstellen der Zustandsraumgleichungen

Um für ein gegebenes LZI-System zu einer gültigen Zustandsraumdarstellung zu kommen, gibt es verschiedene Möglichkeiten, von denen hier zwei vorgestellt werden.

Methode 1: Zustandsgrößen von Energiespeichern

Ein LZI-System der Ordnung n hat in der Regel n Energiespeicher. Als Zustandsgrößen werden die physikalischen Größen gewählt, die den Energiegehalt des Speichers beschreiben [6].

Mechanische Energiespeicher sind zum Beispiel:

- Eine Masse m speichert kinetische Energie, beschrieben durch die Geschwindigkeit der Masse.
- Eine Feder mit Steifigkeit k speichert potentielle Energie, beschrieben durch die Längenänderung der Feder.

Elektrische Energiespeicher sind zum Beispiel:

- Ein Kondensator mit Kapazität C speichert elektrische Feldenergie, beschrieben durch die Spannung am Kondensator.
- Eine Spule mit Induktivität I speichert magnetische Feldenergie, beschrieben durch den Strom durch die Spule.

Keine Energiespeicher sind:

- Ein mechanisches Dämpfungsglied
- Ein elektrischer Widerstand

Letztere können dem System nur Energie entziehen und in Wärme umwandeln.

Beispiel 5.3: Wahl von Zustandsgrößen

LRC-Tiefpass: Es werden die Spannung am Kondensator und der Strom durch die Spule als Zustandsgrößen gewählt.

Masse-Feder-System: Es werden Ort und Geschwindigkeit der Masse als Zustandsgrößen gewählt.

Methode 2: Sortieren von Ableitungen

Das Ableiten der Zustandsgrößen aus den Energiespeichern ist physikalisch einleuchtend, klappt allerdings nicht, wenn in der Differentialgleichung (3.4) Ableitungen des Eingangssignals auftauchen, d.h. wenn wenigstens einer der Koeffizienten $b_1, b_2, \dots$ von Null verschieden ist.

In diesem Fall kann folgendes Rezept angewendet werden:

Rezept zur Herleitung einer Zustandsraumdarstellung

Wir gehen von der allgemeinen Differentialgleichung (3.4) aus:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_q u^{(q)}(t) + b_{q-1} u^{(q-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

Schritt 1: Sortieren aller Summanden mit Ableitungen nach links, alle anderen Summanden nach rechts.

Schritt 2: Gleichsetzen der Gleichung mit der Ableitung der ersten Zustandsgröße $\dot{x}_1$. Es entstehen zwei Gleichung:

- a) $\dot{x}_1 = \text{<Summanden mit Ableitungen>}$
- b) $\dot{x}_1 = \text{<Summanden ohne Ableitungen>}$

Schritt 3: Integration von Gleichung a) (ohne Integrationskonstante C).

Schritt 4: Erneute Anwendung der Schritte 1 bis 3 auf die integrierte Gleichung a) mit den Zustandsgrößen x_2, x_3 etc., bis keine Ableitung mehr vorhanden ist.

Schritt 5: An einer Stelle entsteht eine Gleichung ohne Ableitungen, die nach $y(t)$ aufgelöst werden kann. Diese wird genutzt, um (5.2) der Zustandsraumdarstellung zu erstellen.

Schritt 6: Wo nötig wird der Ausdruck für $y(t)$ in die Gleichungen b) eingesetzt, die dann zur Erstellung von (5.1) der Zustandsraumdarstellung verwendet werden.

Diese Methode der Zustandsdefinition klappt für beliebige LZI-Systeme, hat aber den Nachteil, dass die Zustandsgrößen in der Regel keine einfach zu interpretierende physikalische Bedeutung mehr haben.

Beispiel 5.4: Erstellen der Zustandsraumgleichung durch Sortieren der Ableitungen

Gegeben sei die Gleichung $\ddot{y} + 3\dot{y} = \dot{u}$

Schritt 1a: $\ddot{y} - \dot{u} = -3\dot{y}$

Schritt 2a: a) $\dot{x}_1 = \ddot{y} - \dot{u}$ b) $\dot{x}_1 = -3\dot{y}$

Schritt 3a: $x_1 = \dot{y} - u$

Schritt 1b: $\dot{y} = x_1 + u$

Schritt 2b: a) $\dot{x}_2 = \dot{y}$ b) $\dot{x}_2 = x_1 + u$

Schritt 3b: $x_2 = y$

Schritt 5: aus 3b folgt $y = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \cdot u$

Schritt 6: aus den Gleichungen b) und Schritt 3b folgt

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Die Beobachternormalform

Die Methode des Sortierens der Ableitung kann ganz allgemein auf die Differenzialgleichung (3.4) angewandt werden. Exemplarisch wird die Rechnung hier für ein System der Ordnung $n = q = 2$ mit $a_2 = 1$ durchgeführt, siehe folgendes Beispiel.

Beispiel 5.5: Beobachternormalform

- Gegeben sei folgende allgemeine DGL:

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

- Es soll die Zustandsraumdarstellung nach Methode 2 abgeleitet werden.
- Wir wenden das oben gezeigte Rezept an:

$$\text{Schritt 1a+2a: } \dot{x}_1 := \ddot{y} + a_1\dot{y} - b_2\ddot{u} - b_1\dot{u} = b_0u - a_0y$$

$$\text{Schritt 3a: } x_1 = \dot{y} + a_1y - b_2\dot{u} - b_1u$$

$$\text{Schritt 1b+2b: } \dot{x}_2 := \dot{y} - b_2\dot{u} = x_1 + b_1u - a_1y$$

$$\text{Schritt 3b+5: } x_2 = y - b_2u \quad \Rightarrow \quad y = x_2 + b_2u$$

$$\text{DGL 1: } \dot{x}_1 = -a_0x_2 + (b_0 - a_0b_2)u$$

$$\text{DGL 2: } \dot{x}_2 = x_1 - a_1x_2 + (b_1 - a_1b_2)u$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 - b_2a_0 \\ b_1 - b_2a_1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_2u$$

- Diese Form nennt sich *Beobachternormalform*:

Definition 5.3 (Beobachternormalform): Die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 - b_2a_0 \\ b_1 - b_2a_1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_2u$$

des Systems zweiter Ordnung mit Differenzialgleichung

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0u$$

nennt sich *Beobachternormalform*.

Bemerkungen:

- Die Beobachternormalform lässt sich ohne Schwierigkeiten auf Systeme beliebiger Ordnung n und $q \leq n$ verallgemeinern, siehe z.B. Abschnitt 5.3. in [3].

- Es gibt weitere Standardformen der Zustandsraumdarstellung, wie etwa die Regelungsnormalform oder die Diagonalform, siehe ebenfalls Abschnitt 5.3. in [3].

5.3 Die Zustandsraumdarstellung im Bildbereich

Der Zustandsvektor $\vec{x}(t)$ kann komponentenweise in den Bildbereich transformiert werden:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} \circ \bullet \begin{pmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_N(s) \end{pmatrix} = \vec{X}(s)$$

Mit dem Ableitungssatz (4.8) der Laplace-Transformation lässt sich die Differentialgleichung (5.1) für den Zustandsvektor in eine algebraische Gleichung transformieren,

$$s\vec{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \vec{X}(s) + \vec{b} U(s),$$

und nach $\vec{X}(s)$ auflösen:

$$\vec{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \vec{b} U(s)$$

mit der $N \times N$ Einheitsmatrix $\mathbf{E}$. Eingesetzt in Gleichung (5.2) ergibt sich für das Ausgangssignal im Bildbereich

$$Y(s) = (\vec{c}^T \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \vec{b} + d) U(s).$$

und damit für die Übertragungsfunktion $H(s) = Y(s)/U(s)$:

Satz 5.4 (Übertragungsfunktion in Zustandsraumdarstellung): Ein LZI-System, beschrieben durch die Zustandsraumdarstellung (5.1) und (5.2), besitzt die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \vec{c}^T \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \vec{b} + d. \quad (5.4)$$

Beispiel 5.6: Zustandsraumdarstellung des Flugzeugmodells im Bildbereich

Für das Flugzeugmodell (3.1) mit Differentialgleichung $\ddot{y}(t) = -\gamma \dot{y}(t) + Ku(t)$ wurde eine Zustandsraumdarstellung in Gleichung (5.3) bestimmt. Mit

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s + \gamma)} \begin{pmatrix} s + \gamma & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s(s + \gamma)} (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} s + \gamma & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} = \frac{K}{s(s + \gamma)}.$$

Der stationäre Wert der Sprungantwort und $H(0)$

Genau wie das Ausgangssignal pendelt sich auch der Zustandsvektor eines stabilen LZI-Systems auf einem stationären Wert $\vec{x}_{\text{stat}}$ ein, wenn das Eingangssignal irgendwann einen

konstanten Wert u_{stat} annimmt (vgl. Diskussion am Ende von Abschnitt 4.2). Da in diesem stationären Grenzfall alle Ableitungen verschwinden, vereinfacht sich die Zustandsraumgleichung (5.1) zu

$$\vec{0} = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_{\text{stat}} + \vec{b} u_{\text{stat}} \implies \vec{x}_{\text{stat}} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} u_{\text{stat}}.$$

Für den stationären Wert des Ausgangssignals ergibt sich

$$y_{\text{stat}} = (-\vec{c}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} + d) u_{\text{stat}}.$$

Besonders einfach ist die Situation für die Sprungantwort, denn die Sprungfunktion am Eingang hat für $t > 0$ den konstanten Wert $u_{\text{stat}} = 1$. Damit ergibt sich

Satz 5.5 (Stationäres Verhalten der Sprungantwort): Wenn sich die Sprungantwort auf einen stationären Wert einpendelt, ist dieser durch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -\vec{c}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} + d. \quad (5.5)$$

gegeben.

Vergleich mit Gleichung (5.4) zeigt, dass auch hier wieder $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = H(0)$ gilt.

Stabilität und Eigenwerte der Systemmatrix

In Abschnitt 4.3 wurde gezeigt, dass die Lage der Polstellen der Übertragungsfunktion wichtige Rückschlüsse auf das Systemverhalten erlaubt. Mathematisch betrachtet stellen die Polstellen Definitionslücken der Übertragungsfunktion dar. In der Zustandsraumdarstellung (5.4) der Übertragungsfunktion können solche Definitionslücken nur entstehen, wenn die Matrix $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ nicht invertierbar ist, wenn also

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$$

gilt. Diese Determinante wird das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ genannt, deren Nullstellen genau die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind². Zusammengefasst gilt also der

Satz 5.6: Die Pole der Übertragungsfunktion eines LZI-Systems sind durch die Menge der Eigenwerte der Systemmatrix gegeben.

Das Stabilitätskriterium 4.11 im Bildbereich lässt sich also folgendermaßen umformulieren:

Satz 5.7 (Stabilitätskriterium der Zustandsraumdarstellung): Ein LZI-System mit Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix einen negativen Realteil haben.

²Zur Erinnerung: Ein Vektor $\vec{v}$ heisst Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ mit Eigenwert α , wenn er die Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \alpha \vec{v} \quad (5.6)$$

erfüllt.

Dieses Stabilitätskriterium wird auch durch den Versuch verständlich, die Zustandsraum-Differentialgleichung (5.1) direkt im Zeitbereich zu lösen. Die Lösung dieser Gleichung ist die Summe der allgemeinen Lösung $\vec{x}_h(t)$ der homogenen Gleichung

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = A \cdot \vec{x}_h(t)$$

und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Der homogene Anteil $\vec{x}_h(t)$ stellt die vom Eingangssignal unabhängige Eigenbewegung des Systems dar und ist eine Linearkombination von Termen der Form

$$\vec{x}_h(t) = \vec{v} e^{\alpha t} \quad (5.7)$$

Dabei ist $\vec{v}$ der Eigenvektor der Systemmatrix A mit Eigenwert α , was die Gleichung (5.6) erfüllt. Dass dieser Ausdruck die homogene Zustandsraumgleichung erfüllt, kann leicht nachgeprüft werden:

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = \frac{d}{dt} \vec{v} e^{\alpha t} = \underbrace{\vec{v} \alpha}_{A \cdot \vec{v}} e^{\alpha t} = A \cdot \vec{v} e^{\alpha t} = A \cdot \vec{x}(t)$$

Wenn nun einer dieser Eigenwerte einen positiven Realteil hat, beschreibt die Lösung (5.7) eine exponentiell ansteigende Eigenbewegung. Das System ist also instabil.

Kapitel 6

Digitale Systeme

6.1 Abtastung und diskrete Signale

Dirac- und Sprungfunktion

Der Prozess der Abtastung wurde bereits in Abschnitt 1.3 beschrieben. Die diskreten Versionen der für die Systembeschreibung wichtigen Dirac- und Sprungfunktionen sind

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \geq 0 \\ 0 & \text{falls } n < 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

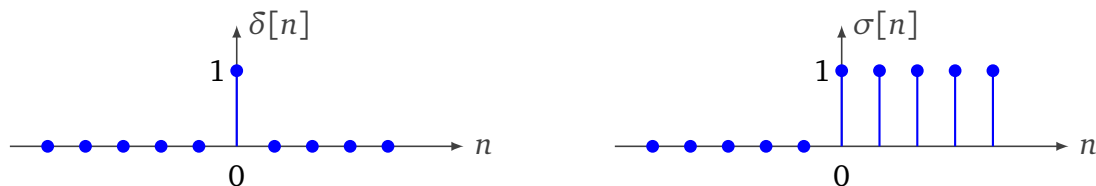


Abbildung 6.1: Die diskrete Dirac- und Sprungfunktion.

Der N -periodische Dirac-Puls ist definiert durch

$$\delta_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3)$$

Die abgetastete Exponentialfunktion

Abtastung einer wachsenden ($\tau > 0$) oder fallenden ($\tau < 0$) Exponentialfunktion mit der Zeitkonstanten τ

$$y(t) = \sigma(t) \cdot e^{t/\tau}$$

liefert die Abtastwerte

$$y[n] = \sigma[n] \cdot e^{nT_s/\tau} = \sigma[n] \cdot a^n$$

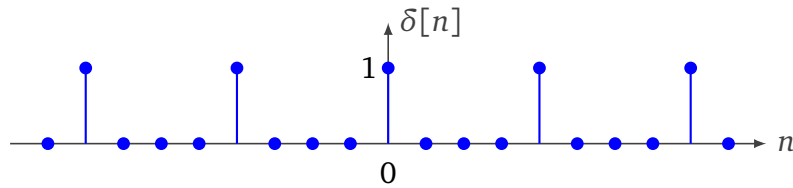


Abbildung 6.2: Diskreter δ_4 -Puls mit Periode 4.

mit

$$a = e^{T_s/\tau} \begin{cases} > 1 & \text{falls } \tau > 0 \\ < 1 & \text{falls } \tau < 0 \end{cases}$$

Die Exponentialfunktion taucht also in den Abtastwerten gar nicht mehr unbedingt explizit auf. Diese Folge von Abtastwerten ist wachsend für $a > 1$ und fallend für $a < 1$.

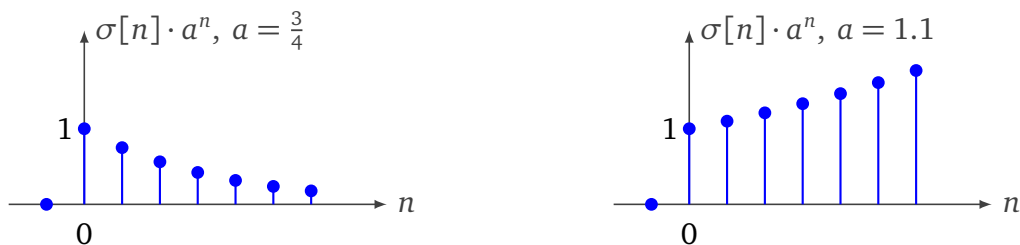


Abbildung 6.3: Abtastwerte einer fallenden und einer wachsenden Exponentialfunktion.

Elementare Signaloperationen

Die in Abschnitt 2.2 diskutierten Signaloperationen der Zeitverschiebung und Spiegelung übertragen sich direkt auf den diskreten Fall:

Zeitverschiebung: Für ein Signal $y[n]$ und einen vorgegebenen Index $n_0 \in \mathbb{Z}$ hat das verschobene Signal

$$x[n] = y[n - n_0]$$

die gleiche Form wie $y[n]$, aber eine andere Position auf der n -Achse. $x[n]$ ist um $|n_0|$

- nach rechts verschoben für $n_0 > 0$,
- nach links verschoben für $n_0 < 0$,

Spiegelung: Für ein Signal $y[n]$ ergibt sich das gespiegelte Signal

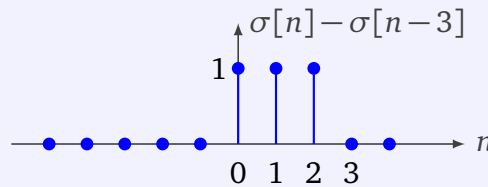
$$x[n] = y[-n]$$

durch Spiegelung des Originals $y[n]$ an der vertikalen Achse bei $n = 0$.

Die Operation der Streckung bzw. Stauchung lässt sich nicht direkt auf diskrete Signale übertragen, da eine Multiplikation $a \cdot n$ eines Indexes n mit einem Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R}$ in der Regel keinen ganzzahligen Wert und damit keinen gültigen Index ergibt.

Beispiel 6.1: Diskretes Rechtecksignal der Breite 3

$\sigma[n] - \sigma[n-3]$ ist ein Rechtecksignal der Breite 3:



6.2 Diskrete LZI-Systeme

Ein diskretes System S transformiert ein diskretes Eingangssignal $u[n]$ in ein diskretes Ausgangssignal $y[n]$, siehe Abbildung 6.4.

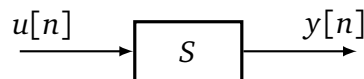


Abbildung 6.4: Ein diskretes System S .

Diese Abbildung wird als

$$y[n] = S[u[n]]$$

bezeichnet. Diskrete Systeme werden oft als *Filter* bezeichnet. Im Gegensatz zu analogen Systemen werden diskrete Systeme in der Regel als Software implementiert. Dennoch verläuft die Diskussion in diesem Abschnitt ganz ähnlich zu Abschnitt 3.1 und ist entsprechend kurz gehalten.

Systemeigenschaften

Linearität: Ein System heißt linear, wenn die Abbildung von Eingang zu Ausgang linear ist:

$$S[\alpha_1 u_1[n] + \alpha_2 u_2[n]] = \alpha_1 S[u_1[n]] + \alpha_2 S[u_2[n]],$$

Die Abtastwerte des Ausgangssignals $y[n]$ eines linearen Systems sind also Linearkombinationen der Eingangswerte:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n, k] \cdot u[k] \quad (6.4)$$

Diese Gewichtsfunktion $h[n, k]$ beschreibt, wie das Eingangssignal zum Zeitpunkt $k \cdot T_s$ das Ausgangssignal zum Zeitpunkt $n \cdot T_s$ beeinflusst.

Zeitinvarianz: Wie für analoge Systeme bedeutet Zeitinvarianz, dass ein verschobenes Eingangssignal zu einem verschobenen Ausgangssignal führt:

$$y[n - n_0] = S[u[n - n_0]]$$

Diskrete Systeme, die linear und zeitinvariant sind, nennen sich LZI-Systeme. Die Gewichtsfunktion $h[n, k]$ eines LZI-Systems kann nur von der Differenz $n - k$, nicht aber von den absoluten Werten der Indizes n und k abhängen:

$$h[n, k] = h[n - k]$$

Einsetzen in den linearen Zusammenhang (6.4) führt auf die diskrete Faltung (siehe Abschnitt 3.3):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n - k] \cdot u[k] = h * u[n]$$

Kausalität: Eingangssignale dürfen nicht zeitlich zurück wirken, d.h. $y[n]$ darf für $k > n$ nicht von $u[k]$ abhängen. Für die Gewichtsfunktion h bedeutet das

$$h[n] = 0 \text{ für } n < 0.$$

Kausalität ist eine sehr plausible Annahme. Für einige Diskussionen ist es dennoch praktisch, die Annahme der Kausalität fallen zu lassen (z.B. bei idealen, frequenzselektiven Filtern).

Genau wie im analogen Fall können diskrete LZI-Systeme durch Antworten auf Standardsignale charakterisiert werden:

Impulsantwort: Es handelt es sich um die Systemantwort auf das Eingangssignal $u[n] = \delta[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n - k] \delta[k] = h[n]$$

D.h. die Impulsantwort ist die oben eingeführte Einflussfunktion, die sich aus der Forderung der Linearität und Zeitinvarianz ergibt. Zusammengefasst gilt der zentrale

Satz 6.1: Die Antwort $y[n]$ eines diskreten LZI-Systems mit Impulsantwort $h[n]$ auf ein Eingangssignal $u[n]$ lässt sich mit der Faltungssumme

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n - k] \cdot u[k] = h * u[n] \quad (6.5)$$

berechnen.

Um den Zusammenhang zur zeitkontinuierlichen Impulsantwort zu verstehen, muss beachtet werden, dass sich $h[n]$ nicht einfach aus den Abtastwerten von $h(t)$ zusammensetzt, denn der diskrete δ -Impuls hat einen von der Abtastzeit T_s unabhängigen Maximalwert von 1. Die zeitkontinuierliche δ -Funktion ergibt sich im Grenzfalle $T_s \rightarrow 0$ durch Multiplikation mit $1/T_s$. Diese Skalierung gilt entsprechend für die Impulsantwort:

$$h(t) = \lim_{\substack{T_s \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{T_s} h[n],$$

wobei der Grenzwert gleichzeitig $n \rightarrow \infty$ und $T_s \rightarrow 0$ laufen lässt, so dass $t = n \cdot T_s$ konstant bleibt.

Sprungantwort: Dabei handelt es sich um die Systemantwort $g[n]$ auf das Eingangssignal $u[n] = \sigma[n]$. Für kausale Systeme ($h[n] = 0$ für $n < 0$) kann die Faltungssumme als

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]\sigma[k] = \sum_{k=0}^n h[n-k] = \sum_{k=0}^n h[k]$$

geschrieben werden. Diese Gleichung ist das diskrete Gegenstück zur linken Gleichung in (3.11) und kann zu

$$g[n] - g[n-1] = h[n]$$

umgekehrt werden, was der rechten Gleichung in (3.11) entspricht.

6.3 Beschreibung von diskreten LZI-Systemen durch Differenzengleichungen

Analoge LZI-Systeme ohne Totzeit lassen sich als lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben, siehe Gleichung (3.4). Diese Art von Differentialgleichung hat kein exaktes Gegenstück im Diskreten, denn die Ableitung kann durch diskrete Werte nur angenähert werden. Die zeitkontinuierliche Ableitung ist definiert als

$$\dot{y}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Dieser Grenzwert kann im Diskreten nicht durchgeführt werden, denn zwei Signalwerte können nicht dichter als eine Abtastzeit zusammenrücken. Für die bestmögliche Näherung der Ableitung wird $\Delta t = T_s$ gesetzt:

$$\dot{y}[n] = \dot{y}(n \cdot T_s) \approx \frac{y(n \cdot T_s) - y(n \cdot T_s - T_s)}{T_s} = \frac{y[n] - y[n-1]}{T_s} \quad (6.6)$$

Zeitkontinuierliche Ableitungen übersetzen sich also in Differenzen zwischen den Abtastwerten im diskreten Fall. Diese *Differenzengleichungen* enthalten immer die Abtastzeit T_s . Im Grenzwert $T_s \rightarrow 0$ ergeben sich wieder die zeitkontinuierlichen Ausdrücke.

Beispiel 6.2: Diskreter Tiefpass

Ein Tiefpass erster Ordnung mit der Zeitkonstanten τ wird durch die Gleichung

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

beschrieben. Eine diskrete Version ist

$$\tau \frac{y[n] - y[n-1]}{T_s} + y[n] = u[n].$$

Sortieren nach Termen mit gleichem Index führt zu

$$y[n] = \frac{T_s}{\tau + T_s} u[n] + \frac{\tau}{\tau + T_s} y[n-1].$$

Diese Form der Gleichung macht die Möglichkeit einer rekursiven Lösung deutlich. Wenn das Eingangssignal und der Anfangswert bekannt sind, kann jedes $y[n]$ aus seinem Vorgänger $y[n-1]$ berechnet werden.

Ableitungen höherer Ordnung können auf ähnliche Art diskretisiert werden. Für die zweite Ableitung ergibt sich z.B.

$$\ddot{y}[n] \approx \frac{\dot{y}[n] - \dot{y}[n-1]}{T_s} = \frac{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]}{T_s^2}.$$

Ganz allgemein wird die k -te Ableitung $y^{(k)}(t)$ durch eine Summe von Termen angenähert, welche Verschiebungen bis zu $y[n-k]$ enthalten.

Das diskrete Gegenstück zur Differentialgleichung (3.4) für analoge LZI-Systeme ist also eine Differenzengleichung der Form

$$\begin{aligned} y[k] &= b_0 u[k] + \dots + b_q u[k-q] - a_1 y[k-1] - \dots - a_n y[k-n] \\ &= \sum_{l=0}^q b_l u[k-l] - \sum_{l=1}^n a_l y[k-l]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dabei ist es üblich, die Gleichung auf eine Form zu bringen, in der der Koeffizient $a_0 = 1$ ist. Bemerkungen:

- n heißt die Ordnung der Differenzengleichung.
- Genau wie für Differentialgleichungen müssen für Differenzengleichungen Anfangsbedingungen gestellt werden, um auf eine eindeutige Lösung zu kommen. Falls nicht explizit anders angegeben, werden die folgenden Standard-Anfangsbedingungen angenommen:

$$y[k] = 0 \text{ für } k < 0$$

- Die Koeffizienten a und b der Differentialgleichung (3.4) dürfen nicht mit denen der entsprechenden Differenzengleichung (6.7) verwechselt werden.

Beispiel 6.3: Koeffizienten eines Tiefpasses, analog und diskret

Für einen Tiefpass erster Ordnung ergeben sich die folgenden nicht-verschwindenden Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{analog:} \quad & a_1 = \tau, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 1 \\ \text{diskret:} \quad & a_1 = -\frac{\tau}{T_s + \tau}, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{T_s}{T_s + \tau} \end{aligned}$$

- Die Diskretisierung einer Differentialgleichung ist nicht eindeutig. Zum Beispiel könnte die Ableitung $\dot{y}(t)$ anstatt wie in Gleichung (6.6) durch

$$\dot{y}[n] = \dot{y}(n \cdot T_s) \approx \frac{y(n \cdot T_s + T_s) - y(n \cdot T_s)}{T_s} = \frac{y[n+1] - y[n]}{T_s}$$

angenähert werden. Nach welchen Kriterien die Diskretisierungsvorschrift gewählt werden sollte, wird in Abschnitt 6.7 diskutiert.

Beispiel 6.4: Impulsantwort eines diskreten Tiefpasses

Die rekursive Darstellung eines diskreten Tiefpasses lautet:

$$y[n] = \frac{T_s}{\tau + T_s} u[n] + \frac{\tau}{\tau + T_s} y[n-1].$$

Mit dem Dirac-Impuls als Eingangssignal ergibt sich die Impulsantwort:

$$h[n] = \frac{T_s}{\tau + T_s} \delta[n] + \frac{\tau}{\tau + T_s} h[n-1].$$

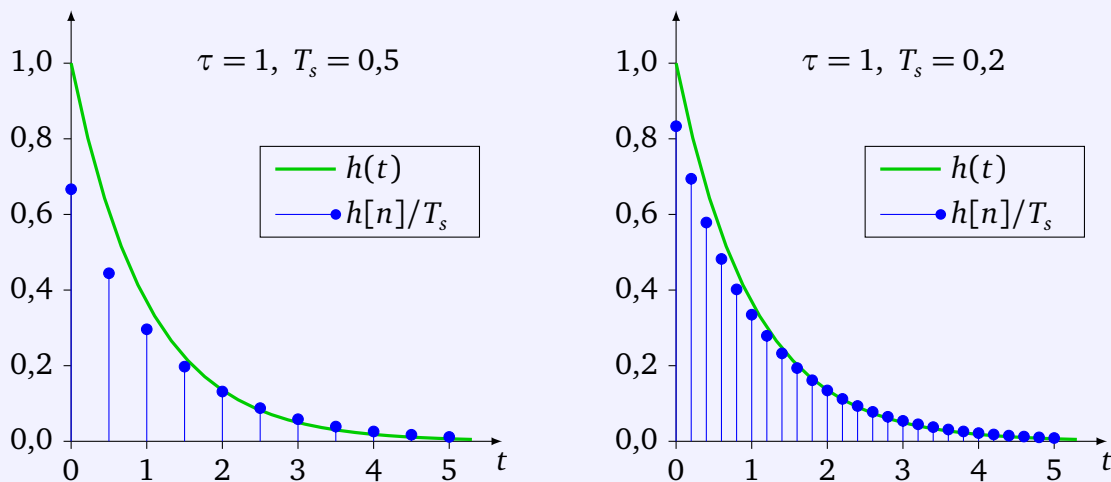
Für $n = 0$ hängt $h[n]$ nur von $\delta[n]$ ab:

$$h[0] = \frac{T_s}{\tau + T_s}.$$

Für $n > 0$ hängt $h[n]$ nur von $h[n-1]$ ab:

$$\begin{aligned} h[1] &= \frac{\tau}{\tau + T_s} h[0] = \frac{\tau}{\tau + T_s} \cdot \frac{T_s}{\tau + T_s} \\ h[2] &= \frac{\tau}{\tau + T_s} h[1] = \left(\frac{\tau}{\tau + T_s} \right)^2 \cdot \frac{T_s}{\tau + T_s} \\ &\dots \\ h[n] &= \sigma[n] \cdot \left(\frac{\tau}{\tau + T_s} \right)^n \cdot \frac{T_s}{\tau + T_s} \end{aligned}$$

Vergleich der diskreten mit der analogen Impulsantwort:



Diskrete und zeitkontinuierliche Impulsantwort eines Tiefpasses erster Ordnung für zwei verschiedene Abtastzeiten: Es wird deutlich, dass $h[n]/T_s$ nicht mit den Abtastwerten von $h(t)$ übereinstimmen, sondern für große Abtastzeiten erheblich abweichen. Diese Abweichung wird mit abnehmender Abtastzeit kleiner.

Der Zusammenhang zwischen $h[n]$ und $h(t)$ wird deutlich, wenn $h[n]$ als

$$\frac{1}{T_s} h[n] = \left(1 - \frac{n T_s}{n(T_s + \tau)} \right)^n \cdot \frac{1}{\tau + T_s}$$

umgeformt wird. Im Grenzfall $T_s \rightarrow 0$, so dass $t = n \cdot T_s$ konstant bleibt (also $n \rightarrow \infty$), ergibt sich mit Hilfe von $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = e^x$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{T_s \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{T_s} h[n] = \lim_{\substack{T_s \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left(1 - \frac{t}{n(T_s + \tau)} \right)^n \cdot \frac{1}{\tau + T_s} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = h(t)$$

wie zu erwarten war.

6.4 Die z-Transformation

Definition der z-Transformation

Die z-Transformation ist die für diskrete Signale angepasste Laplace-Transformation. Daher werden hier nur Signale betrachtet, die für negative Zeiten verschwinden (kausale Signale). Um das Laplace-Integral (4.1) auf diskrete Signale anwenden zu können, wird das sogenannte Abtastsignal

$$y_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] \delta(t - nT_s)$$

betrachtet, welches nur die Abtastwerte $y[n]$ eines analogen Signals $y(t)$ enthält, aber dennoch von der zeitkontinuierlichen Variablen t abhängt. Entsprechend lässt sich die Laplace-Transformation berechnen:

$$\int_0^{\infty} y_s(t) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] \int_0^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] e^{-sT_s n} = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n}$$

mit

$$z = e^{sT_s} \in \mathbb{C}. \quad (6.8)$$

Das führt zur folgenden Definition

Definition 6.2 (z-Transformation): Für ein diskretes Signal $y[n]$ mit $y[n] = 0$ für $n < 0$ und eine komplexe Variable $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n}$$

z-Transformation von $y[n]$. Notation: $y[n] \circ \bullet Y(z)$

Wie bei der Laplace-Transformation sind auch hier die wichtigsten Transformationen in einer Korrespondenztabelle zusammengetragen, siehe Tabelle 6.1.

Die Rücktransformation

Wie im Zeitkontinuierlichen wird die Rücktransformation in der Regel mit Hilfe einer Tabelle von z-Transformierten ausgeführt. Im Fall von gebrochen rationalen Ausdrücken im Bildbereich muss vor der Transformation oft eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. In

Nr.	Signal	z-Transformation	Konvergenzgebiet
(1)	$\delta[n]$	1	alle $z \in \mathbb{C}$
(2)	$\delta[n - n_0], n_0 \geq 0$	z^{-n_0}	alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
(3)	$\sigma[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$	$ z > 1$
(4)	$\sigma[n] \cdot a^n, a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$	$ z > a $
(5)	$\sigma[n] \cdot na^n, a \in \mathbb{C}$	$\frac{az}{(z - a)^2}$	$ z > a $
(6)	$\sigma[n] \cdot n^2 a^n, a \in \mathbb{C}$	$\frac{az(a + z)}{(z - a)^3}$	$ z > a $
(7)	$\sigma[n] \cdot \cos(\omega n), \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$	$ z > 1$
(8)	$\sigma[n] \cdot \sin(\omega n), \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$	$ z > 1$

Tabelle 6.1: Korrespondenztabelle für einige z-Transformationen

Tabelle 6.1 taucht allerdings kein einfacher Pol auf, sondern nur der Ausdruck $z/(z-a)$ (Zeile 4). Daher ist es praktisch, die Partialbruchzerlegung auf $Y(z)/z$ anzuwenden. Nach Multiplikation mit z entstehen aus den einfachen Polen Terme, die mit Zeile 4 transformiert werden können.

Beispiel 6.5: Rücktransformation eines diskreten Signals

Um den Ausdruck

$$Y(z) = \frac{3z^2 - 4z}{z^2 - 3z + 2}$$

in ein diskretes Signal im Zeitbereich zu transformieren, wird zunächst die Partialbruchzerlegung durchgeführt:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3z - 4}{z^2 - 3z + 2} = \frac{2}{z - 2} + \frac{1}{z - 1}$$

Danach ergibt sich:

$$Y(z) = 2 \frac{z}{z - 2} + \frac{z}{z - 1} \bullet \circ y[n] = \sigma[n](2 \cdot 2^n + 1)$$

Eigenschaften der z-Transformation

Linearität: Für Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und Signale $y_1[n]$ und $y_2[n]$ gilt:

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \bullet \circ \alpha Y_1(z) + \beta Y_2(z)$$

Zeitverschiebung um $t_0 = n_0 T_s$ mit $n_0 \geq 0$:

$$y[n - n_0] \circ \bullet z^{-n_0} Y(z) \quad (6.9)$$

Faltung:

$$y_1 * y_2[n] \circ \bullet Y_1(z) \cdot Y_2(z) \quad (6.10)$$

6.5 Übertragungsfunktion diskreter LZI-Systeme

Die z -Transformation $H(z)$ der Impulsantwort $h[n]$,

$$h[n] \circ \bullet H(z),$$

heißt *Übertragungsfunktion* eines LZI-Systems. Wird die allgemeine Eingangs-Ausgangsbeziehung $y[n] = h * u[n]$ mit Hilfe der Faltungsregel (6.10) transformiert, so ergibt sich völlig analog zu Gleichung (4.13) der

Satz 6.3: Für ein diskretes LZI-System mit Übertragungsfunktion $H(z)$ gilt die Eingangs-Ausgangsbeziehung im Bildbereich

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) \quad (6.11)$$

wobei $U(z)$ und $Y(z)$ die z -Transformierten des Eingangssignals $u[n]$ und Ausgangssignals $y[n]$ sind.

Beispiel 6.6: Sprungantwort eines diskreten Systems

Angewandt auf die Sprungfunktion als Eingangssignal liefert der gezeigte Satz für die z -Transformierte der Sprungantwort:

$$G(z) = H(z) \frac{z}{z - 1}$$

Die Differenzengleichung (6.7) eines diskreten LZI-Systems lässt sich mit der Zeitverschiebungsregel (6.9) transformieren:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + \dots + b_q z^{-q} U(z).$$

Aufgelöst nach $Y(z)/U(z)$ führt dies auf den wichtigen

Satz 6.4: Ein durch die Differenzengleichung (6.7) beschriebenes, diskretes LZI-System hat die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (6.12)$$

Beispiel 6.7: Übertragungsfunktion eines diskreten Tiefpasses

Die Koeffizienten eines diskreten Tiefpasses erster Ordnung wurden in einem früheren Beispiel bestimmt mit:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{\tau}{\tau + T_s}, \quad b_0 = \frac{T_s}{\tau + T_s}$$

Damit lautet die Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 z^{-1}} = \frac{\frac{T_s}{\tau + T_s}}{1 - \frac{\tau}{\tau + T_s} z^{-1}} = \frac{T_s z}{(\tau + T_s)z - \tau}$$

Die Impulsantwort kann als inverse z -Transformation mit Hilfe der Tabelle bestimmt werden:

$$H(z) = \frac{T_s}{\tau + T_s} \cdot \frac{z}{z - \frac{\tau}{\tau + T_s}} \bullet \circ \sigma[n] \frac{T_s}{\tau + T_s} \cdot \left(\frac{\tau}{\tau + T_s} \right)^n = h[n]$$

Das entspricht dem Ergebnis aus einem früheren Beispiel.

Beispiel 6.8: Unit-Delay

Die Differenzengleichung

$$y[n] = u[n - 1]$$

bewirkt die Verschiebung des Eingangssignals um eine Abtastzeit und wird entsprechend *Unit-Delay* genannt. Es ergeben sich die Koeffizienten:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

Die Übertragungsfunktion lautet:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0} = \frac{0 + z^{-1}}{1} = \frac{1}{z} \quad (6.13)$$

Der stationäre Wert der Sprungantwort und $H(1)$

Für ein Eingangssignal, das irgendwann einen konstanten Wert u_{stat} annimmt, pendelt sich das Ausgangssignal eines stabilen LZI-Systems auch auf einem stationären Wert y_{stat} ein. Da in diesem stationären Grenzfall die Abtastwerte gleich sind,

$$y[k] = y[k - 1] = \dots = y[k - n] = y_{\text{stat}}, \quad u[k] = u[k - 1] = \dots = u[k - q] = u_{\text{stat}},$$

vereinfacht sich die Differenzengleichung (6.7) zu

$$(1 + a_1 + \dots + a_n)y_{\text{stat}} = (b_0 + b_1 + \dots + b_q)u_{\text{stat}} \iff \frac{y_{\text{stat}}}{u_{\text{stat}}} = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_q}{1 + a_1 + \dots + a_n} = H(z = 1).$$

Besonders einfach ist die Situation für die Sprungantwort, denn die Sprungfunktion am Eingang hat für $k > 0$ den konstanten Wert $u_{\text{stat}} = 1$. Damit ergibt sich

Satz 6.5 (Stationäres Verhalten der Sprungantwort): Wenn sich die diskrete Sprungantwort auf einen stationären Wert einpendelt, ist dieser durch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g[k] = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_q}{1 + a_1 + \dots + a_n} = H(1) \quad (6.14)$$

gegeben.

Dieses Ergebnis ist einfach nur die diskrete Version von Gleichung (4.16), denn der Zusammenhang (6.8) zwischen den komplexen Variablen s und z im Bildbereich lautet für den stationären Grenzfall:

$$s = 0 \implies z = e^{sT_s} = 1$$

Darstellung als Signalflussdiagramm

Ebenso wie analoge Systeme können auch diskrete LZI-Systeme als Signalflussdiagramm realisiert werden. Als Ausgangspunkt dient dabei die Differenzengleichung (6.7). Wie für analoge Systeme werden zur Implementierung dieser Gleichung die bekannten Gain- und Summierer-Blöcke verwendet. Das zeitkontinuierliche Konzept des Integrators wird durch den Unit-Delay Block (6.13) ersetzt und graphisch als

$$u[n] \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow y[n] = u[n-1]$$

dargestellt. Mit diesen Blöcken lässt die die Differenzengleichung (6.7) ganz allgemein wie in Abbildung 6.5 darstellen. Diese Realisierung des Signalflussdiagramms wird *Direktstruktur 1* genannt.

Für Direktstruktur 1 werden $n + q$ Unit-Delay-Blöcke benötigt. Um den Aufwand der Implementierung zu verringern, können die Terme der Differenzengleichung (6.7) folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$y[k] = b_0 u[k] + \underbrace{(b_1 u[k-1] - a_1 y[k-1])}_{(b_1 u - a_1 y)[k-1]} + \underbrace{(b_2 u[k-2] - a_2 y[k-2])}_{(b_2 u - a_2 y)[k-2]} + \dots$$

Indem also zunächst die Summe $b_n u - a_n y$ gebildet und erst danach das Verzögerungsglied angewendet wird, werden nur $\max(n, q)$ Unit-Delay Blöcke benötigt. Diese Realisierung des Signalflussdiagramms wird *Direktstruktur 2* genannt, siehe Abb. 6.6.

Der Frequenzgang diskreter LZI-Systeme

Für stabile Analogsysteme ergibt sich der Frequenzgang, indem die Übertragungsfunktion $H(s)$ auf der imaginären Achse, also für $s = j\omega$ betrachtet wird (siehe Gl. (3.24) und (4.15)). Der Frequenzgang hat den Vorteil, dass er sich als Amplituden- und Phasengang anschaulich interpretieren lässt, siehe Satz 3.9. Diese Zusammenhänge lassen sich direkt auf diskrete

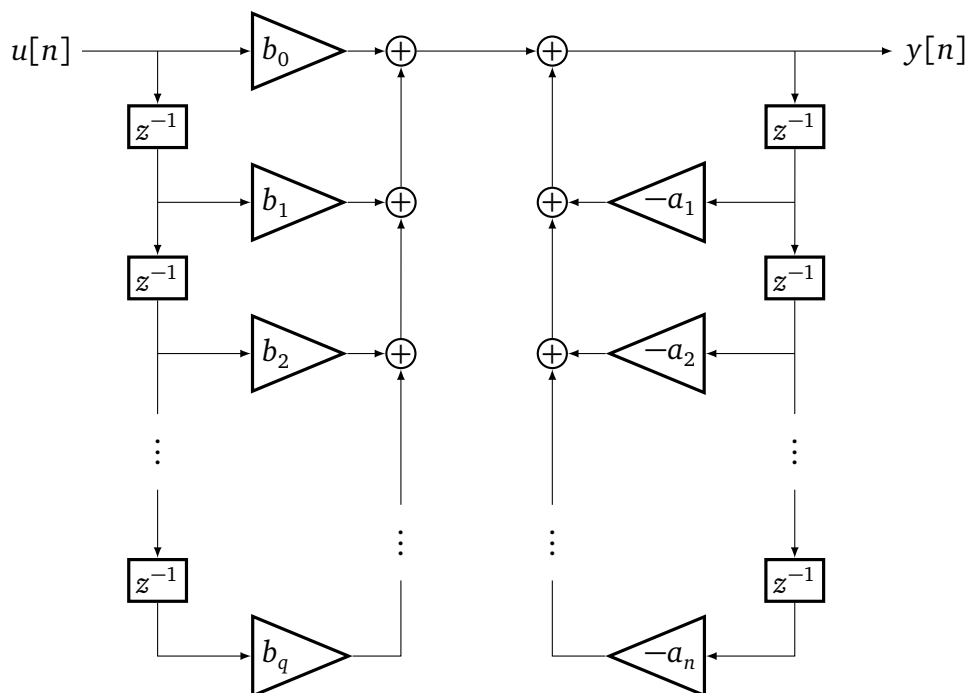


Abbildung 6.5: Signalflussdiagramm (Direktstruktur 1) der Differenzengleichung (6.7) mit $n + q$ Unit-Delay-Blöcken.

Systeme übertragen, indem $s = j\omega$ in Gleichung (6.8) eingesetzt wird, die diskrete Übertragungsfunktion (6.12) also für

$$z = e^{j\omega T_s}$$

ausgewertet wird. Geometrisch betrachtet wird die Übertragungsfunktion auf dem Einheitskreis ausgewertet. Zusammengefasst ergibt sich

Satz 6.6 (Frequenzgang diskreter LZI-Systeme): Ein durch eine Differenzengleichung der Form (6.7) beschriebenes, diskretes LZI-System hat den Frequenzgang

$$H(e^{j\omega T_s}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega T_s} + \dots + b_q e^{-j\omega q T_s}}{1 + a_1 e^{-j\omega T_s} + \dots + a_n e^{-j\omega n T_s}}. \quad (6.15)$$

Es ist zu beachten, dass der Frequenzgang eines diskreten Systems eine Funktion der kontinuierlichen Frequenzvariablen ω ist. Herleitung und anschauliche Interpretation des Frequenzgangs sind also im zeitkontinuierlichen und diskreten Fall ganz ähnlich. Ein fundamentaler Unterschied zwischen analogen und diskreten Systemen ergibt sich aber aus folgender Tatsache:

Satz 6.7 (Periodizität des diskreten Frequenzgangs): Der Frequenzgang (6.15) eines diskreten LZI-Systems ist periodisch mit Periode ω_s . Dabei ist ω_s die zur Abtastzeit T_s gehörende Kreisfrequenz, also $\omega_s = 2\pi/T_s$.

Der Beweis beruht darauf, dass die Frequenz ω im Frequenzgang (6.15) nur über den Faktor $e^{-j\omega k T_s}$ für irgendeinen ganzzahligen Index k auftaucht. Dieser Faktor ist aber ω_s -periodisch:

$$e^{-j(\omega + \omega_s)k T_s} = e^{-j\omega k T_s} \cdot e^{-j\omega_s k T_s} = e^{-j\omega k T_s} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k}}_1 = e^{-j\omega k T_s},$$

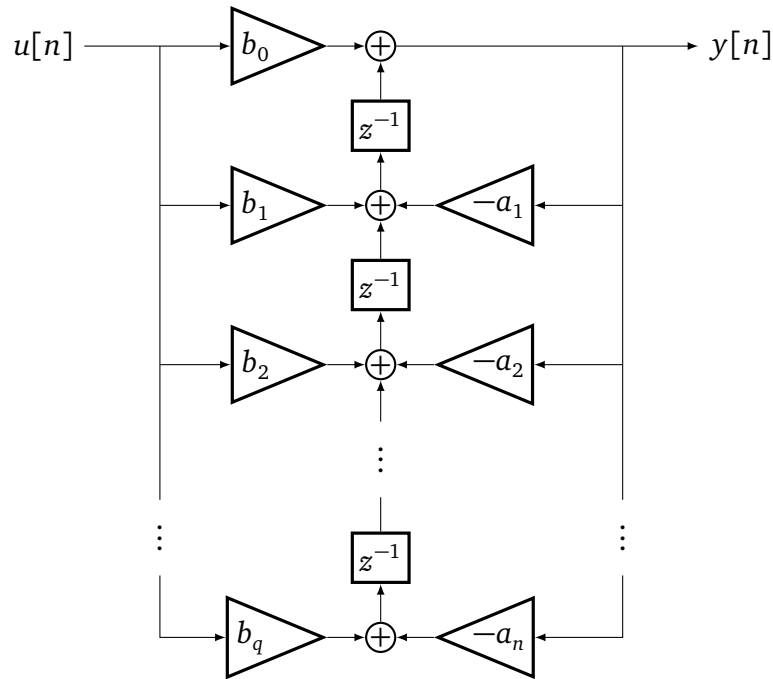


Abbildung 6.6: Signalflussdiagramm (Direktstruktur 2) der Differenzgleichung (6.7) mit $\max(n, q)$ Unit-Delay-Blöcken.

denn $\omega_s \cdot T_s = 2\pi$.

Beispiel 6.9: Amplitudengang eines diskreten Tiefpasses

In einem früheren Beispiel wurde für einen Tiefpass erster Ordnung bereits ermittelt:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{-\tau}{\tau + T_s}, \quad b_0 = \frac{T_s}{\tau + T_s}$$

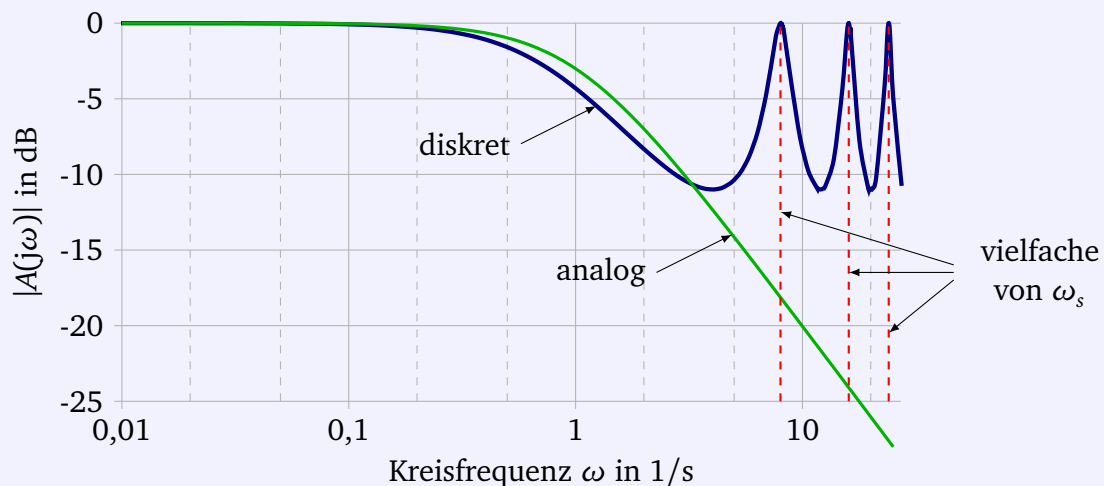
Es folgt für den Frequenzgang:

$$H(e^{j\omega T_s}) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 e^{-j\omega T_s}} = \frac{\frac{T_s}{\tau + T_s}}{1 - \frac{\tau}{\tau + T_s} e^{-j\omega T_s}} = \frac{T_s}{T_s + \tau(1 - e^{-j\omega T_s})}$$

Als Konsistenzüberprüfung kann der Grenzwert $T_s \rightarrow 0$ mit Hilfe der Regel von l'Hospital gebildet werden:

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} H(e^{j\omega T_s}) = \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{T_s}{T_s + \tau(1 - e^{-j\omega T_s})} = \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + j\omega \tau e^{-j\omega T_s}} = \frac{1}{1 + j\omega \tau}$$

Wie erwartet ergibt sich in diesem Grenzfalle der Frequenzgang eines analogen Tiefpasses. Das folgende Diagramm wurde für $\tau = 1 \text{ s}$ und $\omega_s = 8 \text{ s}^{-1}$ erstellt:



In der Abbildung unten sind die beiden Amplitudengänge logarithmisch über einen Frequenzbereich bis gut $3\omega_s$ dargestellt. Folgende Punkte fallen auf:

- Für kleine Frequenzen $\omega \ll \omega_s$ verhalten sich beide Systeme gleich.
- Für $\omega \approx \omega_s$ verhalten sich beide Systeme völlig unterschiedlich, da der Amplitudengang im diskreten Fall aufgrund der Periodizität wieder auf 0 dB zurückgehen muss, wohingegen der Amplitudengang des analogen Systems im Sperrbereich mit 20 dB pro Dekade abfällt.
- Dass die verschiedenen Perioden unterschiedlich breit aussehen, liegt an der logarithmischen Frequenzachse.

Der Alias-Effekt

Die Periodizität des Frequenzgangs hat eine einfache anschauliche Erklärung. Der Frequenzgang eines diskreten LZI-Systems beschreibt die Systemantwort auf ein mit der Abtastzeit T_s abgetastetes Sinus- oder Kosinussignal bzw. etwas allgemeiner auf eine komplexe Exponentialfunktion mit Frequenz ω :

$$u[n] = e^{j\omega n T_s}$$

Wird zur Frequenz ω ein beliebiges, ganzzahliges Vielfaches der Abtastrate ω_s addiert, ergeben sich die gleichen Abtastwerte, mit dem gleichen Argument, wie bei der Erklärung der Periodizität des Frequenzgangs deutlich wurde. Entsprechend muss ein diskretes LZI-System auf Sinus- oder Kosinussignale mit den Frequenzen

$$\omega \pm k \cdot \omega_s$$

die gleiche Systemantwort liefern.

Beispiel 6.10: Abtastung eines Kosinussignals bei nT_s

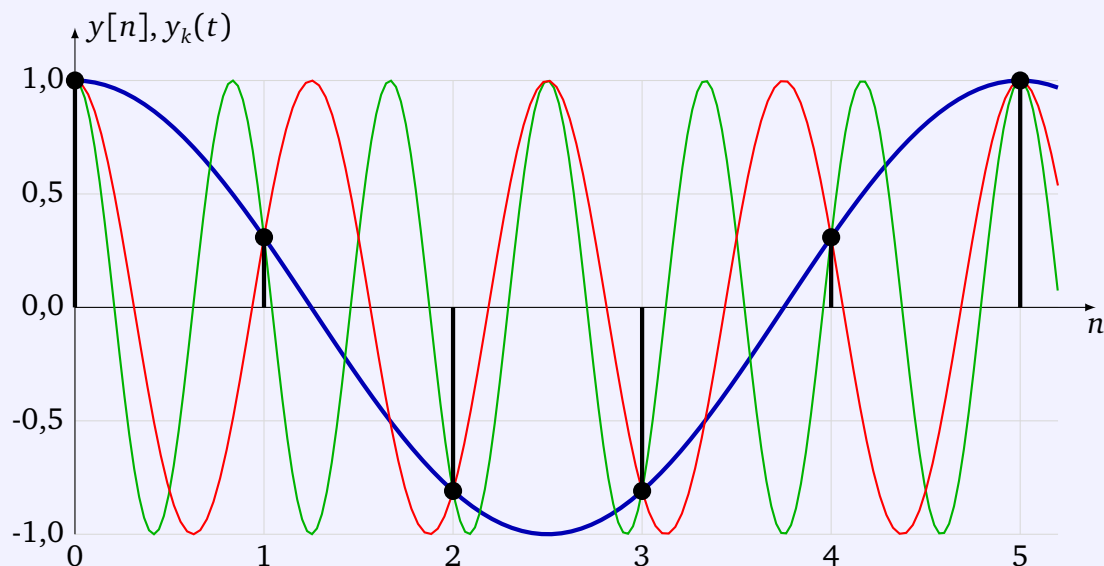
Ein Kosinussignal $\cos(\omega_s t)$ mit Frequenz ω_s liefert bei Abtastung mit der Zeit T_s konstante Abtastwerte, denn

$$u[n] = \cos(\omega_s nT_s) = \cos(2\pi n) = 1.$$

Anschaulich wird der Kosinus genau in seinen Maxima abgetastet. Das ist der Grund, weshalb der Amplitudengang im vorigen Beispiel für $\omega = \omega_s$ wieder auf 0 dB ansteigen muss, da das Eingangssignal in diesem Fall als konstantes Signal betrachtet werden muss.

Beispiel 6.11: Kosinussignale mit gleicher Abtastung

Betrachtet werde ein Signal $y_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ bei einer Abtastung mit $T_s = 2\pi/\omega_s$. Mit $\omega_1 = 0,2 \omega_s$ ergibt sich für $y_1(t)$ die blaue Kurve im unten gezeigten Diagramm. Dabei zeigen die schwarzen Punkte das abgetastete Signal $y[n]$:



Die Punkte $y[n]$ können aber auch alternativ interpretiert werden:

- $y_2(t) = \cos(\omega_2 t)$ mit $\omega_2 = 1,2 \omega_s$ (—)
- $y_3(t) = \cos(\omega_3 t)$ mit $\omega_3 = -0,8 \omega_s$ (—)
- ...

Das bedeutet: $y_1(nT_s) = y_2(nT_s) = y_3(nT_s) = y[n]$

Ganz allgemein wird unter dem *Alias-Effekt* die Tatsache verstanden, dass verschiedene Signale im Zeitbereich identische Abtastwerte liefern können und daher in diskreten LZI-Systemen identische Systemantworten hervorrufen. Weitere Details des Alias-Effekts werden im Abschnitt über die diskrete Fourier-Transformation erklärt.

6.6 Stabilität von diskreten LZI-Systemen

Das Konzept der BIBO-Stabilität aus Definition 4.9 lässt sich ohne Änderung auf diskrete Systeme anwenden. Genau wie im zeitkontinuierlichen Fall ist es nützlich, die Stabilität von Systemen sowohl im Zeitbereich anhand der Impulsantwort als auch im Bildbereich anhand der Übertragungsfunktion zu charakterisieren.

BIBO-Stabilität im Originalbereich

Im Zeitbereich ergibt sich das Stabilitätskriterium ganz einfach, indem das Integral in Gleichung (4.17) durch eine entsprechende Summe ersetzt wird:

Satz 6.8 (Stabilitätskriterium im Zeitbereich): Ein diskretes LZI-System ist genau dann stabil, wenn die Impulsantwort $h[n]$ absolut summierbar ist, wenn also gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (6.16)$$

Beispiel 6.12: Stabilität eines Tiefpasses erster Ordnung

- Die Impulsantwort eines Tiefpasses erster Ordnung aus Beispiel 6.3:

$$h[n] = \sigma[n] \cdot \left(\frac{\tau}{\tau + T_s} \right)^n \cdot \frac{T_s}{\tau + T_s}$$

- Wir prüfen auf Stabilität:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sigma[n] \cdot \left(\frac{\tau}{\tau + T_s} \right)^n \cdot \frac{T_s}{\tau + T_s} \right| \\ &= \frac{T_s}{\tau + T_s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau + T_s} \right)^n = \frac{T_s}{\tau + T_s} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\tau}{\tau + T_s}} = 1 < \infty \end{aligned}$$

BIBO-Stabilität im Bildbereich

Um ein Stabilitätskriterium im Bildbereich zu formulieren, ist es notwendig, den Zusammenhang (6.8) zwischen der s - und der z -Ebene genauer zu verstehen. Die entscheidende Eigenschaft dieser Abbildung ist die Tatsache, dass die imaginäre Achse der s -Ebene auf den Einheitskreis in der z -Ebene abgebildet wird und die linke Halbebene der s -Ebene auf das Innere des Einheitskreises. Daraus ergibt sich das:

Satz 6.9 (Stabilitätskriterium im Bildbereich): Ein diskretes LZI-System ist genau dann stabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion innerhalb des Einheitskreises liegen.

Beispiel 6.13: Pol eines diskreten Tiefpasses

Ein diskreter Tiefpass erster Ordnung mit Zeitkonstante τ hat die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{T_s z}{(\tau + T_s)z - \tau} = \frac{T_s}{T_s + \tau} \cdot \frac{z}{z - \frac{\tau}{\tau + T_s}}$$

und damit den Pol bei

$$\frac{\tau}{\tau + T_s}$$

auf der positiven reellen Achse. Da die Abtastzeit positiv sein muss, liegt der Pol innerhalb des Einheitskreises. Das System ist also stabil.

Vergleich der s -Ebene mit der z -Ebene

Weitere Details beim Vergleich der s -Ebene kontinuierlicher Systeme mit der z -Ebene diskreter Systeme sind in Abbildung 6.7 und Tabelle 6.2 dargestellt.

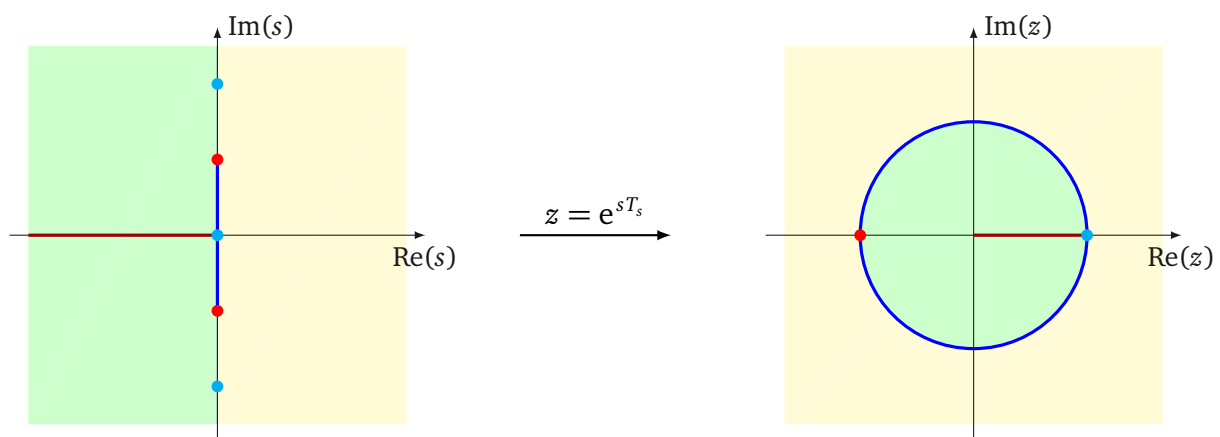


Abbildung 6.7: Komplexe Ebene der Pole für Laplace-Transformation (links) und z -Transformation (rechts).

Die Periodizität des Frequenzgangs wird auch im Bildbereich deutlich. Für stabile analoge LZI-Systeme ist der Frequenzgang die Übertragungsfunktion ausgewertet auf der imaginären Achse. Entsprechend ist der Frequenzgang eines diskreten LZI-Systems die diskrete Übertragungsfunktion ausgewertet auf dem Einheitskreis. Wird die Frequenz von 0 bis ∞ durchlaufen, wird dabei der Einheitskreis immer wieder umrundet. Entsprechend muss der Frequenzgang als Funktion auf dem Einheitskreis periodisch sein.

Die genaue Lage der Pole in der z -Ebene

Um die Lage der Pole eines diskreten Signals in der komplexen z -Ebene besser zu verstehen, ist es instruktiv, die Abtastwerte einer gedämpften ($a < 0$) oder ansteigenden ($a > 0$) Schwingung der Form

$$y(t) = \sigma(t)e^{at} \cos(\omega t)$$

zu betrachten. Abtasten mit Abtastzeit T_s führt auf die Abtastwerte

$$y[n] = y(nT_s) = \sigma[n]e^{aT_s n} \cos(\omega T_s n),$$

Punkt / Gebiet in s -Ebene	Punkt / Gebiet in z -Ebene
Imaginäre Achse: $s = j\omega$	Einheitskreis: $ z = 1$
Rechte Halbebene: $s = \sigma + j\omega$ mit $\sigma > 0$	Äußeres des Einheitskreises: $ z > 1$
Linke Halbebene: $s = \sigma + j\omega$ mit $\sigma < 0$	Inneres des Einheitskreises: $ z < 1$
Negative reelle Achse	Reelles Intervall $z \in (0, 1)$.
$s = -\infty$	$z = 0$
$s = jn\omega_s$ mit $n \in \mathbb{Z}$	$z = 1$
$s = j(n + 1/2)\omega_s$ mit $n \in \mathbb{Z}$	$z = -1$
Nyquistband $s = j\omega$ mit $\omega \in [-\omega_s/2, \omega_s/2]$	Einheitskreis

Tabelle 6.2: Vergleich der komplexen Ebenen für Laplace-Transformation (links) und z -Transformation (rechts).

was sich durch Zerlegen des Kosinus als Summe zweier Exponentialfunktionen auf die Form

$$y[n] = \frac{1}{2}\sigma[n]\left(e^{(aT_s + j\omega T_s)n} + e^{(aT_s - j\omega T_s)n}\right) = \frac{1}{2}\sigma[n](\beta^n + (\beta^*)^n)$$

mit

$$\beta = e^{aT_s + j\omega T_s} = e^{aT_s}(\cos(\omega T_s) + j\sin(\omega T_s)).$$

bringen lässt. Die z -Transformation lautet

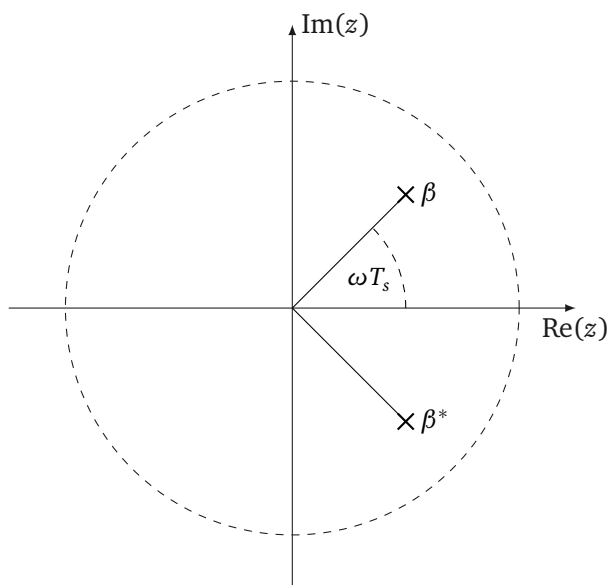
$$y[n] \circ \bullet Y(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z - \beta} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - \beta^*}.$$

Die Pole liegen also bei β und β^* . Der Betrag der Polposition ist

$$|\beta| = e^{aT_s}.$$

Für stark negatives a ist die Schwingung stark gedämpft und die Lage der Pole ist dicht am Ursprung. Für weniger starke Dämpfung liegen die Pole dichter am Einheitskreis. Für positives a wachsen die Schwingungen an, was einer Lage der Pole außerhalb des Einheitskreises entspricht. Die Frequenz ω der Schwingung bestimmt den Winkel zwischen den Polen und der reellen Achse.

Für stabile Systeme dominieren die Pole dichter am Einheitskreis das Systemverhalten, denn den Polen dicht am Ursprung entspricht ein schnelles Abklingen des Signals. Die Übertragungsfunktion eines diskreten LZI-Systems kann oft vereinfacht werden, indem nur die dominanten Pole betrachtet werden.



Auf diese Art und Weise kann aus der Lage der Polstellen der Transformierten $Y(z)$ in der z -Ebene das Verhalten des Signals $y[n]$ im Zeitbereich geschlossen werden, siehe Tabelle 6.3.

FIR- und IIR-Filter

Analoge Systeme lassen sich nur für $n \geq q$ in der Differentialgleichung (3.4) realisieren, da sonst hochfrequente Signale am Eingang beliebig verstärkt werden (siehe Diskussion rund

Lage der Pole von $Y(z)$	Verhalten von $y[n]$
Außerhalb des Einheitskreises	Exponentiell wachsend
Innerhalb des Einheitskreises	Exponentiell fallend
Auf dem Einheitskreis	Mit konstanter Amplitude schwingend
Positive, reelle Achse im Einheitskreis	Exponentiell fallend ohne Schwingung
Negative, reelle Achse im Einheitskreis	Schwingung wie $(-1)^n$
Im Einheitskreis mit Imaginärteil $\neq 0$	Gedämpfte Schwingung

Tabelle 6.3: Einfluss der Lage der Pole von $Y(z)$ auf das Verhalten von $y[n]$ für diskrete Signale.

um Gleichung (3.26)). Dieses Argument ist aufgrund der Periodizität des Frequenzgangs für diskrete Systeme nicht gültig. Der Extremfall $n = 0$ mit verschwindenden Koeffizienten $a_1 = a_2 = \dots = 0$ wird mit $a_0 = 1$ durch die Differenzengleichung

$$y[k] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_q u[k-q]$$

beschrieben und bildet eine besonders wichtige Klasse von diskreten Filtern. Das Ausgangssignal lässt sich in diesem Fall nicht-rekursiv berechnen. Für $u[n] = \delta[n]$ ergibt sich die Impulsantwort

$$h[k] = \begin{cases} b_k & \text{für } k \in 0, 1, \dots, q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

die also nur endlich viele von 0 verschiedene Werte enthält. Zusammengefasst:

Definition 6.10 (FIR- und IIR-Filter): Diskrete LZI-Systeme, bei denen alle Koeffizienten a_k für $k > 0$ den Wert 0 haben, werden *nicht-rekursive Filter* oder auch *FIR-Filter* (Finite Impulse Response) genannt, da die Impulsantwort mit den b -Koeffizienten übereinstimmt und damit zeitlich begrenzt ist. Sobald wenigstens ein Koeffizient a_k für $k > 0$ einen Wert ungleich 0 hat, heißt das System rekursiv oder IIR-Filter (Infinite Impulse Response), da die Impulsantwort im Allgemeinen aus unendlich vielen Werten ungleich 0 besteht.

Im Signalflussdiagramm in Abbildung 6.5 haben FIR-Filter nur den linken Vorwärtzweig, während IIR-Filter einen Rückführungsweig haben.

Die Relevanz der FIR-Filter folgt unter anderem aus der Summierbarkeit der Impulsantwort, denn für ein FIR-Filter gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^q |b_k| < \infty.$$

Zusammen mit dem Stabilitätskriterium im Zeitbereich ergibt sich

Satz 6.11 (Stabilität von FIR-Filtern): FIR-Filter sind grundsätzlich stabil, unabhängig von der Wahl der Filterkoeffizienten b_k .

Instabile Filter sind immer IIR. Die Instabilität eines Filters kann also nur durch einen Rückführungsweig im Signalflussdiagramm verursacht werden.

Ein weiterer Vorteil von FIR-Filtern besteht darin, dass es Methoden gibt, FIR-Filter mit exakt linearem Phasengang und daher minimaler Signalverzerrung zu konstruieren. Nachteilig ist allerdings die Tatsache, dass oft eine sehr hohe Filterordnung q benötigt wird, um ein FIR-Filter mit vorgegebenem Verhalten zu realisieren.

6.7 Nachbildung analoger Systeme

Das Gebiet des Filterdesigns beschäftigt sich mit der Frage, wie sich die Filterkoeffizienten eines diskreten Systems anhand einer vorgegebenen Spezifikation berechnen lassen. Typische Aufgaben sind etwa die Auslegung eines Tiefpassfilters mit vorgegebener Grenzfrequenz und Dämpfung im Sperrbereich oder der diskrete Nachbau eines PID-Reglers. Dazu wird oft von einem bereits bekannten, analogen System ausgegangen, dessen Differenzialgleichung der Form (3.4) in eine Differenzengleichung übersetzt werden muss. Diese Übersetzung wurde für eine Gleichung erster Ordnung bereits in Abschnitt 6.3 durchgeführt. Allerdings bleiben bei diesem Vorgehen Fragen offen:

- Die Diskretisierung in Gleichung (6.6) ist nicht eindeutig. Ebenso wäre für die Ableitung $\dot{y}[n] = (y[n+1] - y[n])/T_s$ oder noch andere Kombinationen möglich.
- Um auch Systeme höherer Ordnung effektiv zu diskretisieren, wäre es günstig, wenn der Übergang von analogem zu diskretem System im Bildbereich ausgeführt werden kann.

Diskretisierung und numerische Integration

Um die Diskretisierung etwas systematischer durchzuführen, wird hier ein einfaches I-Glied betrachtet,

$$\dot{y}(t) = u(t) \quad \text{oder} \quad sY(s) = U(s), \quad (6.17)$$

welches mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in die Integralgleichung

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt$$

umgeformt werden kann. Werden für die Zeiten t_0 und t_1 zwei benachbarte Abtastzeiten eingesetzt, ergibt sich mit der üblichen Notation $y[n] = y(n \cdot T_s)$ die Gleichung

$$y[n] = y[n-1] + \int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt. \quad (6.18)$$

Diskretisierung des I-Gliedes bedeutet also Näherung des Integrals in (6.18) mit Hilfe der Abtastwerte von $u(t)$.

Diskretisierung per (rechter) Rechteckregel

Eine sehr einfache Option ist die Näherung durch ein Rechteck mit Höhe des rechten Funktionswerts (siehe Abbildung 6.8, links), was auf die Differenzengleichung

$$y[n] = y[n-1] + T_s \cdot u[n] \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y[n] - y[n-1]}{T_s} = u[n],$$

also auf die gleiche Diskretisierungsvorschrift wie in (6.6), führt. Im Bildbereich ergibt sich

$$\frac{1}{T_s}(1 - z^{-1})Y(z) = U(z)$$

Vergleich mit der rechten Seite von (6.17) liefert zusammengefasst das Ergebnis

Definition 6.12 (Diskretisierung per Rechteckregel): Bei der Diskretisierung eines analogen Systems mit der (rechten) *Rechteckregel* wird das u -Integral in (6.18) durch

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt \rightarrow T_s \cdot u[n]$$

ersetzt. Im Bildbereich wird die Diskretisierung durch die Ersetzung

$$s \rightarrow \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1})$$

in der Übertragungsfunktion des analogen Systems durchgeführt.

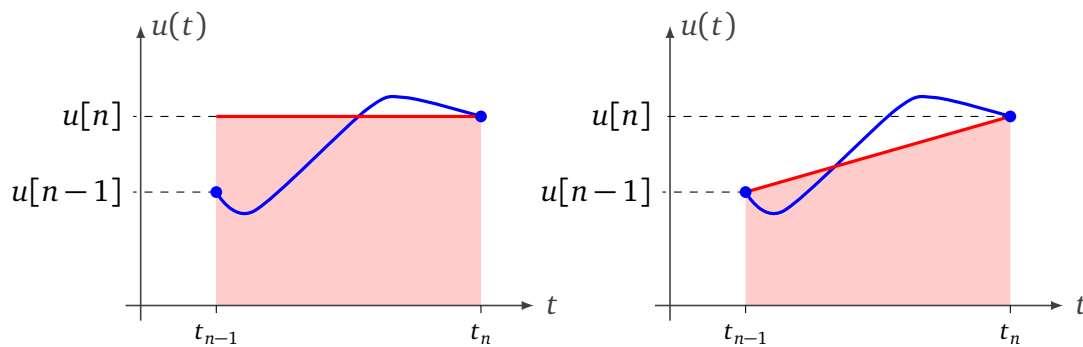


Abbildung 6.8: Links: Rechteckregel als näherungsweise Berechnung der Fläche unter der Funktion u (blau) als Fläche $T_s \cdot u[n]$ des Rechtecks (rot). Rechts: Trapezregel als näherungsweise Berechnung der Fläche unter der Funktion u (blau) als Fläche $T_s \cdot (u[n] + u[n-1])/2$ des Trapezes (rot).

Diskretisierung per Trapezregel

Eine weitere Option ist die Näherung durch ein Trapez (siehe Abbildung 6.8, rechts), was auf die Differenzengleichung

$$y[n] = y[n-1] + \frac{T_s}{2} \cdot (u[n] + u[n-1])$$

und nach Sortieren der Terme auf

$$\frac{1}{T_s}(y[n] - y[n-1]) = \frac{1}{2}(u[n] + u[n-1]),$$

führt. Im Bildbereich ergibt sich

$$\frac{1}{T_s}(1 - z^{-1})Y(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})U(z) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}Y(z) = U(z)$$

Vergleich mit der rechten Seite von (6.17) liefert zusammengefasst das Ergebnis

Definition 6.13 (Diskretisierung per Trapezregel): Bei der Diskretisierung eines analogen Systems mit der *Trapezregel* wird das u -Integral in (6.18) durch

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt \rightarrow \frac{T_s}{2} \cdot (u[n] + u[n-1])$$

ersetzt. Im Bildbereich wird die Diskretisierung durch die Ersetzung

$$s \rightarrow \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

(auch *bilineare Substitution* genannt) in der Übertragungsfunktion des analogen Systems durchgeführt.

Die verschiedenen Verfahren der Diskretisierung liefern diskrete LZI-Systeme, die sich für große Abtastzeiten erheblich unterscheiden, deren Verhalten sich aber im Grenzfall $T_s \rightarrow 0$ annähern. In der Automatisierungstechnik tritt häufig der Fall auf, dass eine Regelvorrichtung diskretisiert werden soll, die Abtastzeit aber sehr viel kleiner als alle Zeitkonstanten der Regelstrecke gewählt werden kann (quasikontinuierliche Regelung). In diesem Fall ist der Unterschied zwischen den verschiedenen Methoden der Diskretisierung minimal, so dass meistens die Rechteckregel gewählt wird, die sich am einfachsten umsetzen lässt.

Andere Methoden der diskreten Nachbildung

Ein ganz anderer Ansatz zur Nachbildung analoger Systeme besteht in der Forderung, dass bestimmte Kennsignale im Zeit- oder Frequenzbereich zwischen analogem und diskretem System möglichst gut übereinstimmen:

- Bei der *impulsinvarianten Nachbildung* wird gefordert, dass die Impulsantwort $h_d[n]$ des diskreten Systems mit den Abtastwerten der Impulsantwort $h_a(t)$ des analogen Systems übereinstimmt:

$$h_d[n] = T_s \cdot h_a(n \cdot T_s)$$

- Bei der *sprunginvarianten Nachbildung* wird gefordert, dass die Sprungantwort $g_d[n]$ des diskreten Systems mit den Abtastwerten der Sprungantwort $g_a(t)$ des analogen Systems übereinstimmt:

$$g_d[n] = g_a(n \cdot T_s)$$

- Ebenso kann gefordert werden, dass die Frequenzgänge von analogem und diskretem System über einen möglichst großen Frequenzbereich übereinstimmen. Diese Forderung führt auf die Trapezregel die in diesem Zusammenhang oft bilineare Substitution genannt wird.

Eine genauere Diskussion dieser Methoden findet sich in [2] und [4].

Kapitel 7

Fourier-Analyse

Im Rahmen der Fourier-Analyse wird untersucht, wie sich ein Signal aus verschiedenen Frequenzanteilen zusammensetzt. Das zentrale Konzept ist dabei die Fourier-Transformation, die bereits in Abschnitt 3.4 erwähnt wurde, hier aber von einem anderen Standpunkt aus beleuchtet wird.

In diesem Kapitel werden vier Arten der Fourier-Analyse betrachten, siehe Tabelle 7.1. Für das Signal im Originalbereich wird unterschieden a) ob das Signal kontinuierlich oder diskret vorliegt und b) ob das Signal periodisch oder zeitlich begrenzt ist.

Variante	Originalbereich		Bildbereich	
	diskret	periodisch	diskret	periodisch
Fourier-Transformation, FT	nein	nein	nein	nein
Fourierreihe, FR	nein	ja	ja	nein
Zeitdiskrete Fourier-Transformation, DTFT	ja	nein	nein	ja
Diskrete Fourier-Transformation, DFT	ja	ja	ja	ja

Tabelle 7.1: Vier Varianten der Fourier-Analyse.

Im folgenden werden die vier Varianten einzeln beleuchtet, wobei die zeitdiskrete Fourier-Transformation im Abschnitt 7.4 *Das Abtasttheorem* behandelt wird. Für einen weiteren Überblick siehe auch Anhang C.

7.1 Fourierreihen

Die Frage, wie sich ein Signal aus verschiedenen Frequenzanteilen aufbaut, heißt ganz konkret: Wie lässt sich das Signal als Kombination von Sinus- und Kosinus-Schwingungen darstellen. Diese Frage lässt sich am einfachsten für T_0 -periodische Signale beantworten und führt auf das Konzept der Fourierreihe:

Satz 7.1 (Reelle Fourierreihe): Ein T_0 -periodisches Signal $y(t)$ lässt sich als unendliche Summe von Sinus- und Kosinus-Funktionen darstellen:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega_0 k t) + b_k \sin(\omega_0 k t)) \quad (7.1)$$

Dabei ist $\omega_0 = 2\pi/T_0$ die zur Periode gehörende Kreisfrequenz. Die Fourier-Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ werden das Spektrum von $y(t)$ genannt.

Bemerkungen:

- Diese wichtige mathematische Tatsache wurde im späten 18. Jahrhundert von Jean Baptiste Fourier bei der Untersuchung der Temperaturverteilung in einer Platte entdeckt.
- Es ist zu beachten, dass nur Terme mit ganzzahligen Vielfachen $\omega_0 k$ der Grundfrequenz ω_0 in der Fourierreihe auftauchen, da andere Frequenzen die T_0 -Periodizität verletzen würden.
- Bemerkenswerterweise lassen sich auch Signale mit Sprungstellen wie etwa periodische Rechteckfunktionen oder Sägezahnfunktionen als Überlagerung der glatten (d.h. stetigen und beliebig oft differenzierbaren) Sinus- und Kosinus-Funktionen darstellen.
- Die Fourierreihe, wie sie hier angegeben ist, ist nur bis auf mathematische Feinheiten gültig, die mit dem Begriff der Konvergenz verbunden sind, der hinter der unendlichen Fourierreihe steckt. So zeigen Fourierreihen an den Sprungstellen der darzustellenden Funktion Überschwinger von etwa 10% (Gibbs-Effekt), die aber mit der Konvergenz der Fourierreihe (7.1) vereinbar sind, siehe folgendes Beispiel.
- Die reellen Fourier-Koeffizienten a_k und b_k enthalten sämtliche Information über die Funktion $y(t)$, d.h. $y(t)$ lässt sich vollständig rekonstruieren, wenn das Spektrum bekannt ist. Die Angabe des Spektrums nennt sich auch die Darstellung der Funktion im Frequenzbereich.
- Der erste Term $a_0/2$ beschreibt den konstanten, zeitunabhängigen Teil der Funktion und wird im Fall eines Spannungssignal auch Gleichanteil (DC-offset) genannt.
- Die Fourierreihe konvergiert nur, wenn die Koeffizienten für große Werte der Indizes k klein werden, wenn also gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

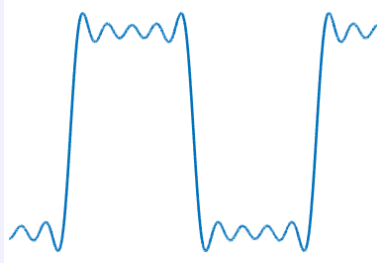
Beispiel 7.1: Gibbs'sches Phänomen

Ein periodisches Rechtecksignal mit Amplitude ± 1 wird genähert durch:

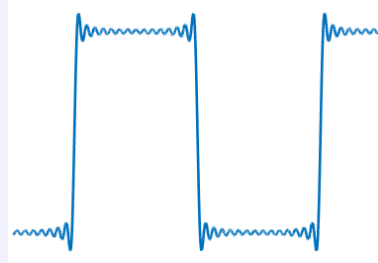
$$y(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega_0 t) + \dots \right)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_0 t)$$

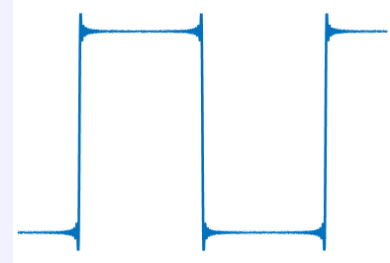
5 Summanden:



15 Summanden:



50 Summanden:



An den Sprungstellen entstehen Überschwinger, wobei die Energie der Überschwinger mit Anzahl der Summanden gegen null konvergiert. Die Amplitude der Überschwinger pendelt sich auf einen Wert von knapp 9 % der Sprunghöhe ein. Das Phänomen wurde um 1898 von Josiah Willard Gibbs analysiert.

Die komplexe Fourierreihe

Mit Hilfe der komplexen Rechnung lässt sich die reelle Fourierreihe (7.1) kompakter darstellen. Dazu werden die Sinus- und Kosinus-Funktionen durch komplexe Exponentialfunktionen,

$$\cos(\omega_0 kt) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 kt} + e^{-j\omega_0 kt}) \quad , \quad \sin(\omega_0 kt) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 kt} - e^{-j\omega_0 kt}) ,$$

ersetzt und die Terme werden umsortiert:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} (e^{j\omega_0 kt} + e^{-j\omega_0 kt}) + \frac{b_k}{2j} (e^{j\omega_0 kt} - e^{-j\omega_0 kt}) \right) \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=:c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2}(a_k - jb_k)}_{=:c_k} e^{j\omega_0 kt} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_k + jb_k)}_{=:c_{-k}} e^{-j\omega_0 kt} \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{j\omega_0 (-k)t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich das Ergebnis

Satz 7.2 (Komplexe Fourierreihe): Die komplexe Fourierreihe eines T_0 -periodischen Signals $y(t)$ lautet

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t} \quad (7.2)$$

mit der Frequenz $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Für $k \geq 0$ ergibt sich der Zusammenhang zwischen den komplexen und reellen Koeffizienten mit:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \quad c_{-k} = c_k^* = \frac{1}{2}(a_k + jb_k), \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(c_k), \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(c_k)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten geschieht am einfachsten im Komplexen mit der Hilfsformel

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j\omega_0 n t} dt = \delta[n], \quad (7.3)$$

die für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gilt und sich durch Integration direkt beweisen lässt. Anwenden dieses Integrals auf die komplexe Fourierreihe (7.2) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) e^{-j\omega_0 n t} dt &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t} e^{-j\omega_0 n t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j\omega_0 (k-n)t} dt}_{\delta[k-n]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta[k-n] = c_n \end{aligned}$$

oder zusammengefasst:

Satz 7.3 (Komplexe Fourierkoeffizienten): Die komplexen Fourierkoeffizienten eines T_0 -periodischen Signals lassen sich mit

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad (7.4)$$

für alle Indizes $k \in \mathbb{Z}$ berechnen.

Bemerkungen:

- Das Integral muss sich über eine Periode erstrecken, die nicht mit dem Intervall $[0, T_0]$ übereinstimmen muss. Oft ist es praktisch, das Intervall $[-T_0/2, T_0/2]$ als Integrationsbereich zu wählen.
- Zerlegung in Real- und Imaginärteil der Koeffizientenformel (7.4) ergibt entsprechende Formeln für die reellen Koeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) \cos(\omega_0 k t) dt \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) \sin(\omega_0 k t) dt \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Betrags- und Phasenspektrum

Für eine graphische Darstellung ist es zweckmäßig, die komplexen Fourierkoeffizienten in Betrag und Phase zu zerlegen:

$$c_k = |c_k| e^{j\varphi_k}, \quad c_{-k} = c_k^* = |c_k| e^{-j\varphi_k}$$

Die Bedeutung dieser Größen wird deutlich, indem die komplexe Fourierreihe in positive und negative Indizes zerlegt wird:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{j\omega_0 k t} + c_{-k} e^{-j\omega_0 k t}) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| e^{j(\omega_0 k t + \varphi_k)} + |c_k| e^{-j(\omega_0 k t + \varphi_k)}) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos(\omega_0 k t + \varphi_k) \end{aligned}$$

Das Betragsspektrum $|c_k|$ gibt also (bis auf einen Faktor 2) die Stärke an, mit der eine harmonische Schwingung der Frequenz $\omega_0 k$ zum Signal $y(t)$ beiträgt. Das Phasenspektrum gibt an, wie die Schwingungen gegeneinander verschoben sein müssen, um sich zum Signal $y(t)$ zu überlagern. Üblicherweise wird als Wertebereich des Phasenspektrums das Intervall $[-\pi, \pi]$ gewählt. Einige charakteristische Werte der Phase sind:

φ_k	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π oder $-\pi$
$\cos(\omega_0 k t + \varphi_k)$	$\sin(\omega_0 k t)$	$\cos(\omega_0 k t)$	$-\sin(\omega_0 k t)$	$-\cos(\omega_0 k t)$

Eigenschaften der Fourierkoeffizienten

Symmetrie im Zeitbereich: Die reelle Fourierreihe ist eine explizite Zerlegung von $y(t)$ in gerade und ungerade Anteile

$$y(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 k t)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_0 k t)}_{\text{ungerade}}$$

Daraus ergibt sich folgende wichtige Konsequenz für das Spektrum einer periodischen Funktion. Für die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion gilt:

$$y(t) \text{ gerade} \iff b_k = 0, \quad y(t) \text{ ungerade} \iff a_k = 0$$

Entsprechend gilt für die komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$y(t) \text{ gerade} \iff c_k \text{ reell}, \quad y(t) \text{ ungerade} \iff c_k \text{ imaginär}$$

Symmetrie im Frequenzbereich: Das Betragsspektrum ist gerade, das Phasenspektrum ungerade:

$$|c_{-k}| = |c_k|, \quad \varphi_{-k} = -\varphi_k,$$

was direkt aus der Relation $c_k^* = c_{-k}$ folgt.

Zeitverschiebung: Ein um eine feste Zeit t_0 zeitlich verschobenes Signal $y(t - t_0)$ hat das gleiche Betragsspektrum wie das Originalsignal $y(t)$. Die Verschiebung macht sich nur im Phasenspektrum bemerkbar.

Beispiel 7.2: Fourieranalyse eines periodischen Rechtecksignals

Ein gerades, T_0 -periodisches Rechtecksignal der Höhe 1 und Pulsbreite τ ist definiert als

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad t \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$$

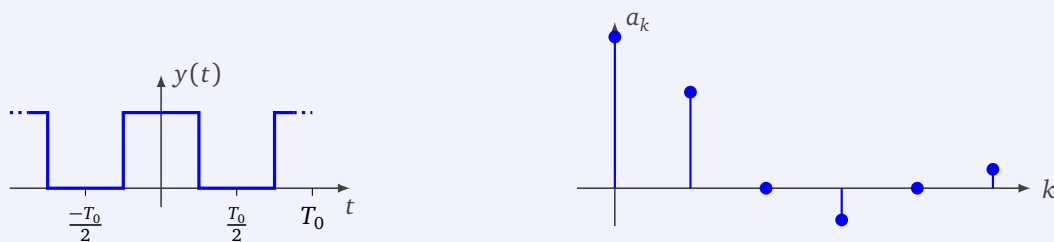
und durch die Periodizität $y(t) = y(t + T_0)$ außerhalb dieses Intervalls. Aufgrund der Symmetrie wird erwartet, dass die Koeffizienten c_k reell sind. Das Integral ergibt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega_0 k t} dt = -\frac{1}{j\omega_0 T_0 k} (e^{-j\omega_0 k \tau/2} - e^{j\omega_0 k \tau/2}) \\ &= \frac{2}{\omega_0 T_0 k} \sin\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_0 k \frac{\tau}{2}} = \frac{\tau}{T_0} \text{si}\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T_0} \text{si}\left(k\pi \frac{\tau}{T_0}\right) \end{aligned}$$

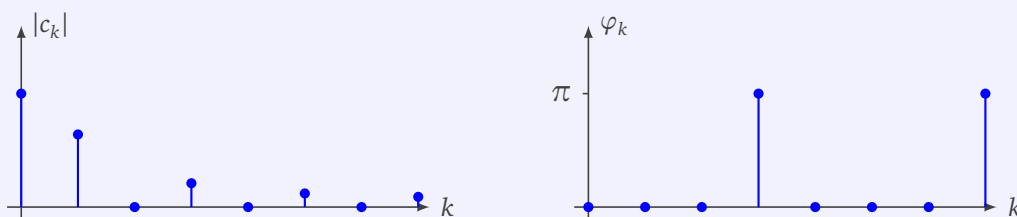
mit der si-Funktion, definiert in Gleichung (B.1). Für die reellen a -Koeffizienten ergibt sich

$$a_k = 2 \frac{\tau}{T_0} \text{si}\left(k\pi \frac{\tau}{T_0}\right)$$

und $b_k = 0$ aufgrund der Symmetrie.



Periodisches Rechtecksignal mit $\tau = T_0/2$ und das entsprechende Spektrum.



Betrags- und Phasenspektrum

Energie und Leistung von Signalen

Definition 7.4 (Energie und Leistung):

1.) Ein Signal heißt **Energiesignal**, wenn die Signalenergie, definiert als

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt, \quad (7.5)$$

einen endlichen Wert hat.

2.) Für ein T_0 -periodisches Signal heißt

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t)^2 dt \quad (7.6)$$

die Leistung des Signals.

Bemerkungen:

- Damit die Signalenergie endlich ist, muss ein Energiesignal für große Zeiten klein werden. Ein Energiesignal ist also auf der Zeitachse lokalisiert.
- Periodische Signale haben unendliche Energie, da sie für große Zeiten nicht kleiner werden. Daher macht das Konzept Signalenergie nur für eine Periode Sinn. Die Signalleistung ist die Signalenergie in einer Periode geteilt durch die Periodendauer.
- Für periodische Signale heißt der Wert $\sqrt{P}$ **Effektivwert** des Signals. Der Effektivwert eines periodischen Signals $y(t)$ ist der Wert eines konstanten Signals mit gleicher Leistung.
- Der Begriff Energiesignal ist eng mit dem Begriff 'integrierbar' verbunden, wie er z.B. in Gleichung (4.17) verwendet wird. Ein Signal heißt integrierbar, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty$ ist. Es kann gezeigt werden, dass integrierbare Signale immer auch Energiesignale sind, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty \implies \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt < \infty.$$

Der Umkehrschluss gilt allerdings nicht. Die si-Funktion etwa (siehe Abschnitt B) ist ein Energiesignal, aber nicht integrierbar.

Beispiel 7.3: Leistung und Effektivwert einer Sinusspannung

Eine Sinusspannung $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit Periode $T = 2\pi/\omega$ hat eine Leistung von

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)^2 dt = \frac{U_0^2}{T} \underbrace{\int_0^T \sin^2(\omega t) dt}_{\frac{T}{2}} = \frac{U_0^2}{2}.$$

Die Effektivspannung beträgt $U_0/\sqrt{2}$.

Da das Spektrum eines periodischen Signals die volle Information über das Signal enthält, lässt sich auch die Leistung durch die Fourierkoeffizienten ausdrücken. Dazu wird die komplexe Fourierreihe in die Definition der Leistung eingesetzt und es ergibt sich folgendes Ergebnis:

Satz 7.5 (Leistung im Frequenzbereich): Die Leistung eines T_0 -periodischen Signals lässt sich mit

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

aus den komplexen Fourierkoeffizienten berechnen. $|c_k|^2$ gibt also den Anteil an der gesamten Signalleistung an, der auf der Frequenz $\omega_0 k$ erbracht wird.

7.2 Die Fourier-Transformation

Eine Fourierreihe kann nur für periodische Signale berechnet werden. Um auch Energiesignalen ein Spektrum zuzuordnen, kann versucht werden, die Periode T_0 beliebig groß werden zu lassen. In diesem Fall werden die Fourierkoeffizienten beliebig klein aufgrund der Faktoren $1/T_0$ in Gleichung (7.4). Die eigentliche Frequenzinformation ist aber im Integral selbst enthalten. Multiplikation von Gleichung (7.4) mit T_0 ergibt also

$$T_0 c_k \xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega_0 k t} dt =: Y(j\omega_0 k).$$

Da für $T_0 \rightarrow \infty$ der Abstand ω_0 der Frequenzen, die in der Fourierreihe auftauchen, gegen 0 geht, wird die Frequenz zu einer kontinuierlichen Variablen. Das führt auf folgende, zentrale

Definition 7.6 (Fourier-Transformation): Für ein integrierbares Signal $y(t)$ heißt

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.7)$$

die Fourier-Transformation von $y(t)$.

Bemerkungen:

- Auch für die Fourier-Transformation wird das übliche Symbol benutzt:

$$y(t) \circ \longrightarrow Y(j\omega)$$

- Die Fourier-Transformation tauchte schon in Gleichung (3.23) auf. Der Frequenzgang ist also die Fourier-Transformierte der Impulsantwort.
- Die Fourier-Transformation entsteht als Grenzwert der Größe

$$T_0 c_k = 2\pi \frac{c_k}{\omega_0},$$

die den Frequenzanteil eines Signal pro Frequenzintervall der Breite ω_0 , also eine Dichte angibt. Daher wird $Y(j\omega)$ auch *spektrale Dichte* des Signals $y(t)$ genannt.

- Die Überlegungen vor der Definition zeigen, dass Abtastung der Fourier-Transformation

$$c_k = \frac{1}{T_0} Y(j\omega_0 k) \quad (7.8)$$

die Fourierkoeffizienten der periodischen Fortsetzung von $y(t)$ ergibt.

- Wenn das Zeitsignal für große Zeiten nicht gegen 0 geht, kann das Fourier-Integral nicht konvergieren. Für integrierbare Signale hat die Fourier-Transformation aber einen endlichen Wert für jede Frequenz ω , denn

$$|Y(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_1 dt < \infty$$

Beispiel 7.4: Transformation eines Rechtecksignals

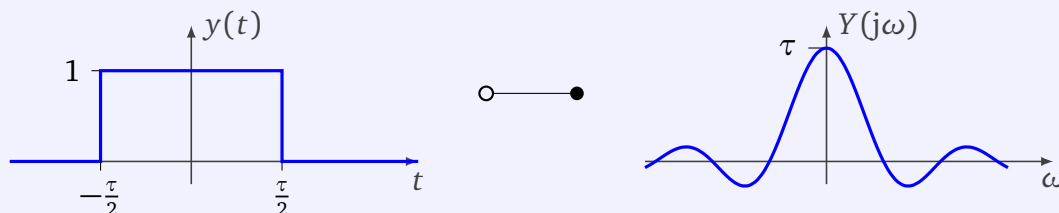
Die Fourier-Transformation eines Rechtecksignals ist

$$Y(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \tau \cdot \text{si}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right),$$

wobei die si-Funktion in Abschnitt B definiert ist. ω_0 -Abtasten ergibt wie erwartet die Fourierkoeffizienten

$$\frac{1}{T_0} Y(j\omega_0 k) = \frac{\tau}{T_0} \text{si}\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right)$$

der periodischen Rechteckfunktion.



Die inverse Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation lässt sich als Grenzwert $T_0 \rightarrow \infty$ der Formel der Fourierkoeffizienten verstehen. Die Fourierreihe selbst konstruiert das Signal im Zeitbereich aus den Fourierkoeffizienten. Der Grenzwert $T_0 \rightarrow \infty$ kann durch geschicktes Einbauen des Faktors $T_0 \omega_0 / 2\pi = 1$ durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{T_0 c_k}_{Y(j\omega_0 k)} e^{j\omega_0 k t} \cdot \omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(j\omega_0 k) e^{j\omega_0 k t} \cdot \Delta\omega \xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Um den Übergang zum Integral deutlicher zu machen, wurde dabei der Frequenzabstand $\omega_0 = \Delta\omega$ genannt, der für $T_0 \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Zusammengefasst ergibt sich:

Satz 7.7 (Inverse Fourier-Transformation): Aus einer Fourier-Transformierten $Y(j\omega)$ lässt sich das Signal im Zeitbereich durch die inverse Fourier-Transformation

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.9)$$

berechnen.

Es ist alles andere als offensichtlich, dass die so definierte inverse Fourier-Transformation die Vorwärtstransformation aus Gleichung (7.7) rückgängig macht. Wird die Definition für $Y(j\omega)$ in die inverse Transformation eingesetzt, so ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{-j\omega t'} dt'}_{Y(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t')} d\omega}_{\delta(t-t')?} dt'.$$

Diese Gleichung kann nur richtig sein, wenn das innere Integral auf der rechten Seite $\delta(t - t')$ ergibt, wenn also allgemeiner formuliert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} du = \delta(x) \quad (7.10)$$

gilt. Im Rahmen der üblichen Integralrechnung kann diese Formel nicht richtig sein, denn es handelt sich um ein divergentes Integral. Wird allerdings dieses Integral als der simultane Grenzwert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} du := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{jux} du$$

definiert, ergibt sich nach Ausführen der Integration die Darstellung (2.9) der δ -Funktion. Die inverse Fourier-Transformation ist also nur sinnvoll definiert, wenn das uneigentliche Frequenzintegral in diesem Sinne verstanden wird.

Eigenschaften und Tabelle mit Fourier-Transformationen

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaft der Fourier-Transformation aufgelistet, die völlig analog zu den entsprechenden Eigenschaften der Fourierkoeffizienten einer Fourierreihe sind.

Symmetrie im Original-/Zeitbereich:

$$y(t) \text{ gerade} \iff Y(j\omega) \text{ reell}, \quad y(t) \text{ ungerade} \iff Y(j\omega) \text{ imaginär}$$

Zur Erinnerung:

- *Spiegelsymmetrische* Funktionen (um die Ordinate) werden *gerade* genannt
- *Punktsymmetrische* Funktionen (um den Ursprung) werden *ungerade* genannt
- Eine reelle Funktion $Y(j\omega)$ beschreibt die Gewichtung von cos-Funktionen
- Eine imaginäre Funktion $Y(j\omega)$ beschreibt die Gewichtung von sin-Funktionen

Symmetrie im Bild-/Frequenzbereich: Zur graphischen Darstellung ist es praktisch, die Fourier-Transformierte in Betrag und Phase zu zerlegen:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)|e^{j\varphi(j\omega)}$$

Ebenso wie bei den Fourierkoeffizienten ist der Betrag gerade und die Phase ungerade:

$$|Y(-j\omega)| = |Y(j\omega)|, \quad \varphi(-j\omega) = -\varphi(j\omega)$$

Zeitverschiebung: Verschiebung um eine feste Zeit t_0 im Zeitbereich bedeutet Multiplikation mit einem Phasenfaktor im Frequenzbereich:

$$y(t - t_0) \circ \bullet e^{-j\omega t_0} Y(j\omega) \quad (7.11)$$

Das Amplitudenspektrum $|Y(j\omega)|$ ändert sich durch eine Verschiebung im Zeitbereich nicht.

Energie: Da die Fourier-Transformierte die vollständige Information über das Signal $y(t)$ enthält, lässt sich auch die Energie durch ein Integral über den Frequenzbereich ausdrücken:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega \quad (7.12)$$

$\frac{1}{2\pi} |Y(j\omega)|^2 d\omega$ ist die Energie, die das Signal $y(t)$ im Frequenzintervall zwischen ω und $\omega + d\omega$ enthält. $|Y(j\omega)|^2$ wird daher auch spektrale Energiedichte genannt.

Bemerkungen:

- Zeile (1) lässt sich durch direktes Integrieren des Fourier-Integrals berechnen, siehe das Beispiel auf Seite 108. Zeile (2) wird mit der gleichen Rechnung überprüft, indem auf der Frequenzseite begonnen und die inverse Fourier-Transformationen angewendet wird.
- Anhand von (3) wird deutlich, dass die Impulsantwort eines Tiefpasses, Gleichung (3.12), transformiert den entsprechenden Frequenzgang, Gleichung (3.25), ergibt.
- Die Zeilen (4) und (5) folgen direkt aus der Ausblendeigenschaft der δ -Funktion. (5) kann auch aus (4) durch Zeitverschiebung hergeleitet werden, siehe Gleichung (7.11)
- Die Zeilen (6) und (7) lassen sich mit Hilfe der Integralformel (7.10) herleiten.
- Die Zeilen (8) und (9) ergeben sich aus Zeile (7), indem die Kosinus- und Sinusfunktionen als Summe bzw. Differenz von komplexen Exponentialfunktionen geschrieben wird.

Nr.	Signal	Fourier-Transformierte
(1)	$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{si}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
(2)	$\text{si}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{\omega_0} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$
(3)	$\sigma(t) \cdot e^{-t/\tau}$	$\frac{\tau}{1 + j\omega\tau}$
(4)	$\delta(t)$	1
(5)	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
(6)	1	$2\pi\delta(\omega)$
(7)	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
(8)	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$
(9)	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$

Tabelle 7.2: Tabelle mit wichtigen Fourier-Transformationen.

Impulsantwort bei der Analyse von LZI-Systemen

Mit den bisherigen Ergebnissen wird die zentrale Rolle der Impulsantwort bei der Analyse von LZI-Systemen deutlich. Die Transformation $\delta(t) \longleftrightarrow 1$ lässt sich als inverse Transformation

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

schreiben. Die δ -Funktion ist also eine gleichmäßige Überlagerung von harmonischen Schwingungen *aller* Frequenzen. Die Anregung eines Systems mit einem δ -Puls testet das System also auf allen Frequenzen aus. Diese Information ist vollständig in der Impulsantwort enthalten.

Auf eine einzelne komplexe Exponentialfunktion reagiert ein System durch Multiplikation mit dem Frequenzgang, siehe Gleichung (3.22).



Aufgrund der Linearität des Systems kann dieser Zusammenhang in die Integraldarstellung der δ -Funktion reingezogen werden:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \xrightarrow{\quad} \boxed{S} \xrightarrow{\quad} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = h(t)$$

Die Impulsantwort ist also die inverse Fourier-Transformation des Frequenzgangs.

Faltungs- und Fenstersätze

Es ist wenig überraschend, dass auch für die Fourier-Transformation ein Faltungssatz ähnlich wie für die Laplace-Transformationen gilt (siehe Gleichung (4.7)). Da aber für die Fourier-Transformation die inverse Transformation (7.9) existiert, welche die gleiche mathematische Form wie die Fourier-Transformation selbst hat, gibt es umgekehrt auch einen Zusammenhang zwischen Multiplikation im Zeitbereich und Faltung im Frequenzbereich.

Satz 7.8 (Faltungs- und Fenstersatz): $y_1(t)$ und $y_2(t)$ seien zwei Signale, deren Fourier-Transformation existiert. Dann gilt:

$$y_1(t) * y_2(t) \circ \bullet Y_1(j\omega) \cdot Y_2(j\omega) \quad (7.13)$$

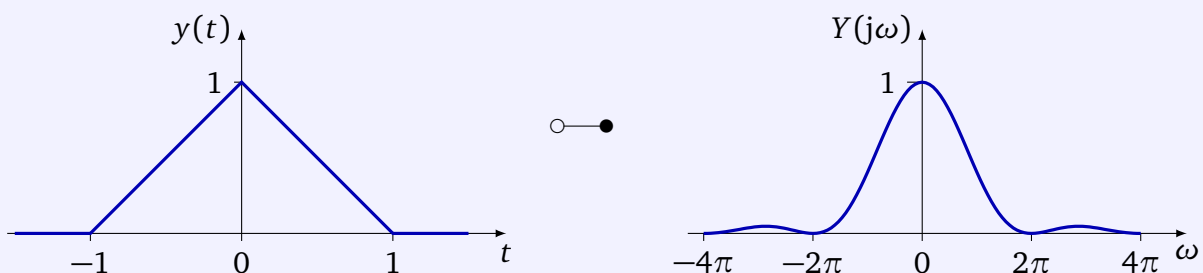
$$y_1(t) \cdot y_2(t) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} Y_1(j\omega) * Y_2(j\omega) \quad (7.14)$$

Beide Gleichungen lassen sich ähnlich wie der Faltungssatz (4.7) für die Laplace-Transformation zeigen.

Beispiel 7.5: Transformation eines Dreiecksignals

- Wir betrachten ein Dreiecksignal: $y(t) = \begin{cases} 1+t & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ 1-t & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Es kann auch als Faltung von zwei Rechtecksignalen betrachtet werden
- Mit $\text{rect}(t) \circ \bullet \text{si}(\omega/2)$ folgt:

$$y(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t) \circ \bullet \text{si}(\omega/2) \cdot \text{si}(\omega/2) = \text{si}^2(\omega/2) = Y(j\omega)$$



Die Bedeutung der zweiten Gleichung im gezeigten Satz liegt darin, dass oft ein Signal zeitlich begrenzt werden soll, was sich durch Multiplikation mit einer Rechteckfunktion oder einer ähnlichen, schnell auf Null abfallenden, sogenannten Fensterfunktion realisieren lässt. Im Frequenzbereich ergibt sich dann die Faltung des Spektrums mit der Fourier-Transformierten des Fensters.

Beispiel 7.6: Fouriertransformation eines zeitlich begrenzten Kosinussignals

$y(t)$ sei ein Kosinussignal mit Frequenz $\hat{\omega}$ und Periode $\hat{T}$, das nach N Perioden abbricht:

$$y(t) = \begin{cases} \cos(\hat{\omega}t) & \text{falls } -\frac{N\hat{T}}{2} \leq t \leq \frac{N\hat{T}}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Um das Spektrum zu berechnen, ist es hilfreich, $y(t)$ als Kosinussignal zu betrachten, das mit einem Rechteckfenster der Breite $N\hat{T}$ multipliziert wird:

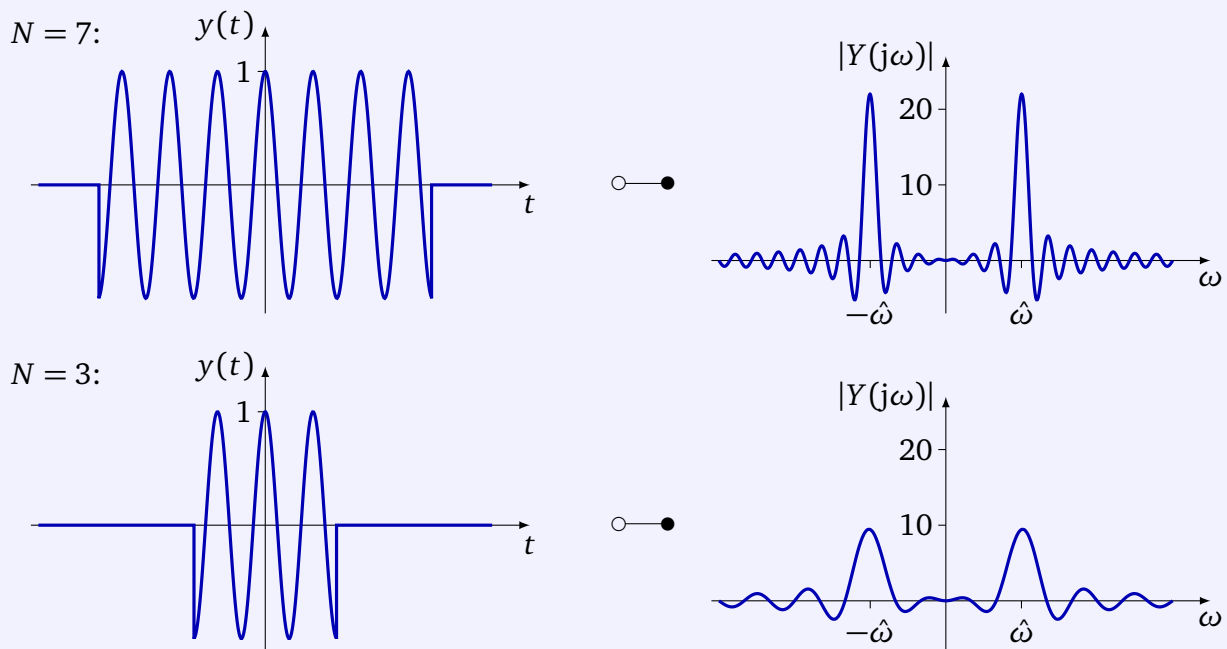
$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{N\hat{T}}\right) \cdot \cos(\hat{\omega}t)$$

In den oberen beiden Plots von Abbildung ?? wird dieses Signal für $N = 3$ bzw. $N = 7$ im Zeitbereich dargestellt.

Das Spektrum ergibt sich mit Hilfe des Fenstersatzes, Gleichung (7.14), und den bekannten Transformationen von Kosinus- und Rechtecksignal:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} N\hat{T} \text{si}\left(\frac{N\hat{T}}{2}\omega\right) * \pi(\delta(\omega + \hat{\omega}) + \delta(\omega - \hat{\omega})) \\ &= \frac{N\hat{T}}{2} \left(\text{si}\left((\omega - \hat{\omega})\frac{N\hat{T}}{2}\right) + \text{si}\left((\omega + \hat{\omega})\frac{N\hat{T}}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

denn Faltung mit dem δ -Puls bedeutet Verschieben an die Position des Peaks, siehe Gleichung (3.18). Hier zwei Beispiele für $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ mit $N = 7$ und $N = 3$:



Die Betragsspektren rechts haben zwei Maxima bei den Frequenzen $\pm\hat{\omega}$. Mit zunehmendem N , also mit zunehmender Aufnahmedauer des Signals im Zeitbereich, werden die Maxima schärfer. Dies ist ein Beispiel für die Zeit-Frequenz-Unschärferelation, die ganz allgemein besagt, dass die Auflösung im Zeitbereich umgekehrt proportional zur Auflösung im Frequenzbereich ist.

7.3 Die diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Für die computerbasierte Fourier-Analyse muss sich ein Signal sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich mit endlich vielen Werten darstellen lassen. Nur dann ist eine Speicherung in einem Array möglich.

- Diskrete Werte ergeben sich durch Abtasten mit einer Abtastzeit T_s . Wie bereits in Satz 6.7 am Beispiel der Impulsantwort gesehen wird dadurch der Frequenzbereich periodisch mit Periode $\omega_s = 2\pi/T_s$.
- Endlich viele Werte ergeben sich, indem das Signal im Zeitbereich als T_0 -periodisch angenommen wird. Das Signal kann dann mit den N Abtastwerten einer Periode dargestellt werden. Der Zusammenhang zwischen der Abtastzeit T_s , der Periode T_0 und der Anzahl N an Abtastwerten ist

$$T_0 = N \cdot T_s.$$

Durch die T_0 -Periodizität im Zeitbereich wird das Spektrum diskret mit Frequenzabstand $\omega_0 = 2\pi/T_0$, wie von der Theorie der Fourierreihen in Abschnitt 7.1 bekannt ist.

Durch Periodizität *und* Abtastung im Zeitbereich entsteht also ebenfalls Periodizität und Abtastung im Frequenzbereich, wie in folgender Tabelle zusammengefasst ist:

	Original-/Zeitbereich	Bild-/Frequenzbereich
Abtastung	T_s	ω_0
Periode	$T_0 = N \cdot T_s$	$\omega_s = N \cdot \omega_0$

Die T_0 -Periodizität eines kontinuierlichen Zeitsignals übersetzt sich bei Diskretisierung in eine N -Periodizität der Abtastwerte:

$$y[n] = y(n \cdot T_s) = y(n \cdot T_s + T_0) = y((n + N) \cdot T_s) = y[n + N]$$

Eine Periode des diskreten Signals wird also durch die N Abtastwerte $y[0], y[1], \dots, y[N-1]$ beschrieben. Ebenso übersetzt sich die ω_s -Periodizität einer Fourier-Transformierten in eine N -Periodizität nach Diskretisierung mit ω_0 .

Ein guter Startpunkt für die Herleitung der diskreten Fourier-Transformation ist also die Koeffizientenformel der Fourierreihe:

$$T_0 c_k = \int_0^{T_0} y(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j\omega_0 k n T_s} \cdot T_s$$

Teilen durch T_s und Einsetzen von $\omega_0 T_s = 2\pi/N$ ergibt mit der Bezeichnung $Y[k] = N c_k$ die

Definition 7.9 (Diskrete Fourier-Transformation): Für eine Folge von N Abtastwerten $y[n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ heißt

$$Y[k] := \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-jkn \frac{2\pi}{N}} \quad (7.15)$$

für $k = 0, 1, \dots, N-1$ die diskrete Fourier-Transformation (DFT).

Notation: $y[n] \circ \bullet Y[k]$.

Bemerkungen:

- Wie erwartet ist die so definierte DFT N -periodisch:

$$Y[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j(k+N)n\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} \cdot \underbrace{e^{-jNn\frac{2\pi}{N}}}_1 = Y[k] \quad (7.16)$$

- In Matlab wird die DFT mit dem Kommando `fft` berechnet. Diese Name steht für *Fast Fourier Transform*. Dabei handelt es sich um einen besonders schnellen Algorithmus zur Berechnung der DFT.
- Mit der Beziehung (7.8) und der Bezeichnung $Y[k] = Nc_k$ ergibt sich

$$T_s Y[k] = T_s N c_k = T_0 c_k = Y(j\omega_0 k).$$

Soll mit der DFT im Fall kleiner Abtastzeiten eine kontinuierliche Fourier-Transformation angenähert werden, so muss die DFT also noch mit der Abtastzeit T_s multipliziert werden, um die richtige Skalierung zu erreichen.

Beispiel 7.7: DFT eines konstanten Signals

DFT eines konstanten Signals $y[n] = 1$:

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi kn/N}$$

Für $k = 0$ haben alle Summanden den Wert 1, d.h. $Y[0] = N$. Für $k \neq 0$ liegen all Summanden gleichmäßig verteilt auf dem Einheitskreis, so dass für $k \neq 0$ folgt $Y[k] = 0$. Es folgt:

$$1 \circ \bullet N\delta[k]$$

- Vergleich mit der Fourier-Transformation: $1 \circ \bullet 2\pi\delta(\omega)$
- Vergleich mit der Fourierreihe: $1 \circ \bullet \delta[n]$

Beispiel 7.8: DFT eines Kosinussignals

Ein Kosinussignal $y(t) = \cos(\hat{\omega}t)$ mit Kreisfrequenz $\hat{\omega}$ werde über L Perioden N mal abgetastet. Es ergibt sich eine gesamte Abtastdauer $T_0 = 2\pi L/\hat{\omega}$ und eine Abtastrate $T_s = T_0/N$:

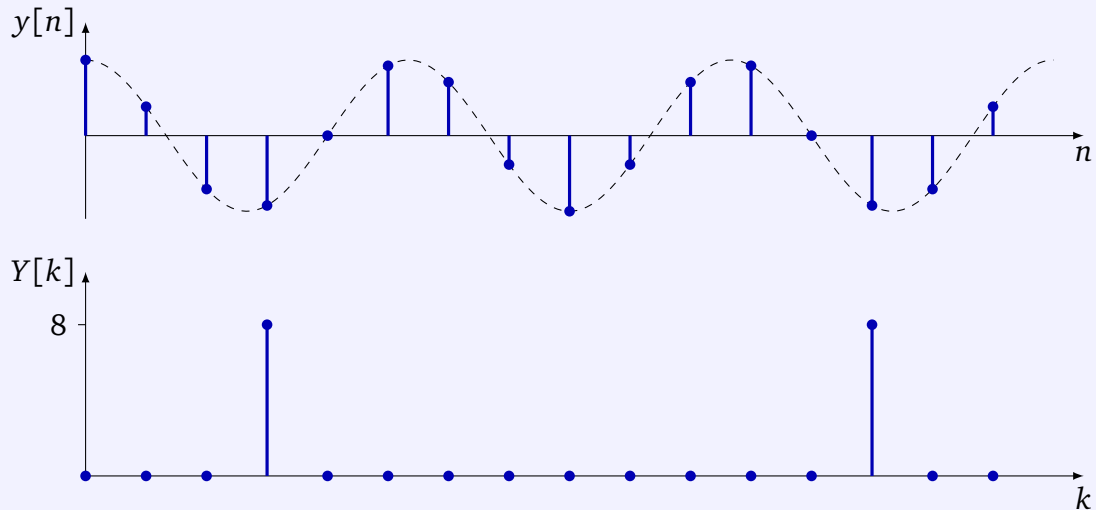
$$y[n] = \cos(\hat{\omega}nT_s) = \cos\left(L\frac{2\pi}{N}n\right) = \frac{1}{2}\left(e^{jL\frac{2\pi}{N}n} + e^{-jL\frac{2\pi}{N}n}\right)$$

Die DFT lautet

$$Y[k] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jL\frac{2\pi}{N}n} + e^{-jL\frac{2\pi}{N}n} \right) \cdot e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-L)n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+L)n}$$

$$= \frac{N}{2} (\delta_N[k-L] + \delta_N[k+L]) = \frac{N}{2} (\delta_N[k-L] + \delta_N[k-(N-L)])$$

Die Peaks sind bei $k = \pm L$ was zur Frequenz $L \cdot \omega_0 = \hat{\omega}$ gehört. Hier ein Beispiel für $\hat{\omega} = 1$, $L = 3$ und $N = 16$:



Die inverse diskrete Fourier-Transformation

Genau wie die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation lässt sich auch die diskrete Fourier-Transformation durch eine Formel umkehren, welche die gleiche mathematische Struktur hat:

Satz 7.10 (Inverse DFT): Aus einem nach Gleichung (7.15) berechneten Signal $Y[k]$ im Frequenzbereich lässt sich durch

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] e^{jkn \frac{2\pi}{N}} \quad (7.17)$$

das ursprüngliche Signal $y[n]$ im Zeitbereich zurückgewinnen.

Zum Beweis wird die DFT aus Gleichung (7.15) in die rechte Seite der Rücktransformation eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] e^{jkn \frac{2\pi}{N}} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y[m] e^{-jkm \frac{2\pi}{N}} e^{jkn \frac{2\pi}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} y[m] \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk(n-m) \frac{2\pi}{N}}}_{\delta_N[n-m]} = \sum_{m=0}^{N-1} y[m] \delta[n-m] = y[n] \end{aligned}$$

Dabei wurde die Gleichung

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jkn \frac{2\pi}{N}} = \delta_N[n] \quad (7.18)$$

mit dem in (6.3) definierten N -periodischen δ -Peak benutzt, die sich mit Hilfe der geometrischen Summe nachrechnen lässt.

Die inverse DFT ergibt sich auch aus der Abtastung der Fourierreihe in Gleichung (7.2), wenn berücksichtigt wird, dass die Summe aufgrund der Periodizität im Frequenzbereich nur von 0 bis $N - 1$ laufen muss.

Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation

Symmetrie im Original-/Zeitbereich:

$$y[n] \text{ gerade} \iff Y[k] \text{ reell}, \quad y[n] \text{ ungerade} \iff Y[k] \text{ imaginär}$$

Symmetrie im Bild-/Frequenzbereich: Da in diesem Skript das Zeitsignal immer reell ist, ist die komplexe konjugierte DFT durch

$$Y^*[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{jkn \frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j(-k)n \frac{2\pi}{N}} = Y[-k]$$

gegeben. Zusammen mit der Periodizität (7.16) ergibt sich das folgende, wichtige Ergebnis:

Satz 7.11 (Symmetrie der DFT): Die DFT $Y[k]$ eines reellen Zeitsignals erfüllt die Symmetrierelation

$$Y^*[k] = Y[N - k] \quad (7.19)$$

Bemerkungen:

- Die volle Information der DFT steckt also in den Werten mit Indizes $k = 0, \dots, \frac{N}{2}$. Der Rest des Spektrums lässt sich mit der Symmetrierelation berechnen. Daher wird das Spektrum in der Regel nur bis zum Index $\frac{N}{2}$ dargestellt. Das entspricht der halben Abtastfrequenz ω_s . Dass die Frequenz $\omega_s/2$ eine zentrale Rolle spielt, wird vor allem im Abtasttheorem 7.14 deutlich.
- Zur graphischen Darstellung ist es praktisch, die Fourier-Transformierte in Betrag und Phase zu zerlegen:

$$Y[k] = |Y[k]| e^{j\varphi[k]}$$

Die Symmetrie lautet dann

$$|Y[k]| = |Y[N - k]|, \quad \varphi[k] = -\varphi[N - k]$$

Beispiel 7.9: Hintere Werte der DFT eines reellen Signals

Die ersten 4 Werte der DFT eines reellen Zeitsignals bestehend aus $N = 6$ Abtastwerten seien gegeben durch

$$Y[0] = 4, \quad Y[1] = 2 - j, \quad Y[2] = 1 + 3j, \quad Y[3] = 1$$

Damit sind die verbleibenden 2 Werte festgelegt:

$$\begin{aligned} Y[4] &= Y[4 - 6] = Y[-2] = Y^*[2] = (1 + 3j)^* = 1 - 3j \\ Y[5] &= Y[5 - 6] = Y[-1] = Y^*[1] = (2 - j)^* = 2 + j \end{aligned}$$

Für den Index 0 und den Mittelindex 3 lautet die Symmetrierelation

$$\begin{aligned} Y[0] &= Y[0 - 6] = Y[-6] = Y^*[6] = Y^*[0] \\ Y[3] &= Y[3 - 6] = Y[-3] = Y^*[3] \end{aligned}$$

Die DFT-Werte $Y[0]$ und $Y[N/2]$ müssen also reell sein.

Zeitverschiebung: Verschiebung eines Signals um n_0 : $y'[n] = y[n - n_0]$

Mit $y[n] \circ \bullet Y[k]$ folgt:

$$y'[n] = y[n - n_0] \circ \bullet e^{-jkn_0/N} Y[k] = Y'[k]$$

Das Betragsspektrum bleibt unverändert: $|Y'[k]| = |Y[k]|$. Das Phasenspektrum verändert sich zu: $\varphi'[k] = \varphi[k] - kn_0/N$. Eine konstante Zeitverschiebung bedeutet eine lineare Phasenverschiebung.

Energie: Ganz ähnlich wie in Gleichung (7.12) lässt sich auch hier die Signalenergie einer Periode im Zeit- und im Frequenzbereich ausdrücken:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |Y[k]|^2$$

Diese Gleichung lässt sich nachprüfen, indem für $y[n]$ die inverse DFT eingesetzt und dann Gleichung (7.18) benutzt wird.

7.4 Das Abtasttheorem

Beim Abtasten eines zeitkontinuierlichen Signals geht im Allgemeinen Information verloren, da die Abtastwerte keine Aussage über den Signalverlauf *zwischen* zwei Abtastzeiten liefern. Daher kann das zeitkontinuierliche Signal im Allgemeinen nicht fehlerfrei aus seinen Abtastwerten rekonstruiert werden. Dieses Problem der Signal-Rekonstruktion ist von großer praktischer Bedeutung. Wenn etwa ein digitalisiertes Musikstück (z.B. im wav-Format) abgespielt wird, handelt es sich um die Rekonstruktion des akustischen Signals aus den Abtastwerten. Es stellt sich daher die Frage, ob nicht gewisse Anforderungen an das zeitkontinuierliche Signal und die Abtastzeit gestellt werden können, so dass die Rekonstruktion dennoch möglich ist, oder anders formuliert:

Unter welchen Bedingungen kann ein zeitkontinuierliches Signal $y(t)$ fehlerfrei aus seinen Abtastwerten $y[n]$ rekonstruiert werden?

Diese Frage soll in diesem Abschnitt mit Hilfe der Fourier-Analyse beantwortet werden.

Die zeitdiskrete Fourier-Transformation

Die in diesem Kontext geeignete Variante der Fourier-Transformation arbeitet mit diskreten, nicht-periodischen Signalen.

Definition 7.12 (Zeitdiskrete Fourier-Transformation): Für eine Folge von Abtastwerten $y[n]$ mit Abtastzeit T_s heißt

$$Y(e^{j\omega T_s}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n T_s} \quad (7.20)$$

die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT). Notation: $y[n] \circ \bullet Y(e^{j\omega T_s})$.

Bemerkungen:

- Im Gegensatz zur DFT wird hier nicht verlangt, dass das Signal im Zeitbereich periodisch ist. Daher hängt der Frequenzbereich von einer kontinuierlichen Variable ω ab.
- Die DTFT wurde schon bei der Diskussion diskreter LZI-Systeme benutzt. Der Frequenzgang eines diskreten LZI-Systems aus Satz 6.6 ist die DTFT der diskreten Impulsantwort.

Entscheidend für alles Weitere ist die durch die Abtastung erzeugte Periodizität im Frequenzbereich:

Satz 7.13 (Periodizität der DTFT): $y(t)$ sei ein zeitkontinuierliches Signal mit Fourier-Transformation $Y(j\omega)$. Die DTFT der mit der Abtastzeit T_s abgetasteten Abtastwerte sei $Y(e^{j\omega T_s})$. Dann ist $Y(e^{j\omega T_s})$ die ω_s -periodische Fortsetzung von $\frac{1}{T_s} Y(j\omega)$. Es gilt also:

$$Y(e^{j\omega T_s}) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(j(\omega - n\omega_s)) \quad (7.21)$$

Der Faktor von $1/T_s$ hat keine konzeptionelle Bedeutung und ist nur der üblichen Definition der DTFT geschuldet.

Dass die DTFT ω_s -periodisch ist, lässt sich leicht zeigen, denn in der Definition der DTFT in Gleichung (7.20) taucht die Frequenz nur in der Exponentialfunktion, die ω_s -periodisch ist, auf:

$$e^{-j(\omega+\omega_s)nT_s} = e^{-j\omega nT_s} \cdot e^{-j\omega_s nT_s} = e^{-j\omega nT_s} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi n}}_1 = e^{-j\omega nT_s}$$

Dass es sich bei $Y(e^{j\omega T_s})$ aber um die periodische Fortsetzung des Spektrums des zeitkontinuierlichen Signals $y(t)$ handelt, wird hier nicht bewiesen.

Dieser Satz ist hilfreich, um das Spektrum eines abgetasteten Signals ohne Rechnung zu erhalten, wenn das Spektrum $Y(j\omega)$ des zeitkontinuierlichen Signals bekannt ist. Dazu muss nur $Y(j\omega)$ periodisch mit Periode ω_s fortgesetzt, also Kopien von $Y(j\omega)$, die um den Abstand ω_s auf der Frequenzachse gegeneinander verschoben sind, aufsummiert werden.

Beispiel 7.10: DTFT eines Kosinussignals

Ein Kosinussignal mit einer vorgegebenen Frequenz $\hat{\omega}$ hat die Fourier-Transformation

$$y(t) = \cos(\hat{\omega}t) \circ \bullet Y(j\omega) = \pi\delta(\omega - \hat{\omega}) + \pi\delta(\omega + \hat{\omega})$$

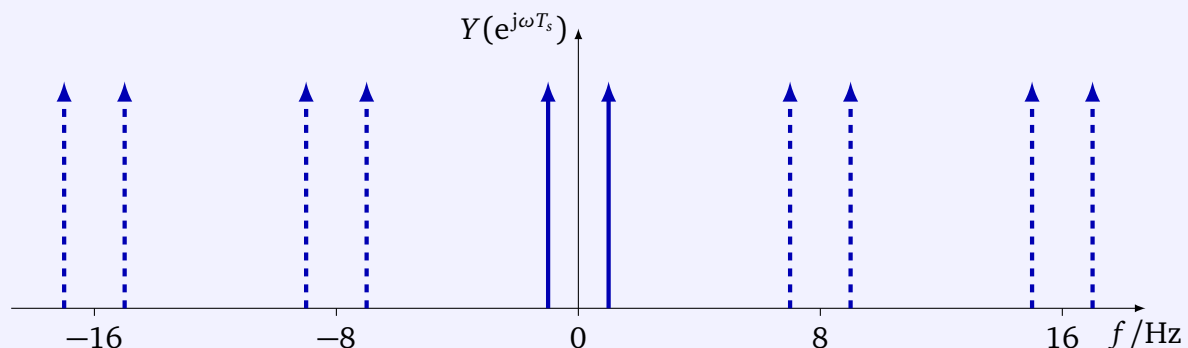
Die DTFT ergibt sich durch periodische Fortsetzung:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega T_s}) &= \frac{\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \hat{\omega} - n\omega_s) + \delta(\omega + \hat{\omega} - n\omega_s)) \\ &= \frac{\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - (n\omega_s + \hat{\omega})) + \delta(\omega - (n\omega_s - \hat{\omega}))) \end{aligned}$$

Das Spektrum hat Peaks bei $n \cdot \omega_s \pm \hat{\omega}$ für alle ganzen Zahlen n . Ganz allgemein liefert das Signal

$$\cos((\hat{\omega} - k\omega_s)t)$$

für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ genau die gleiche DTFT. Das ist der schon in Abschnitt 6.5 diskutierte Alias-Effekt. Hier ein Beispiel für $\hat{f} = 1$ Hz und $f_s = 8$ Hz:



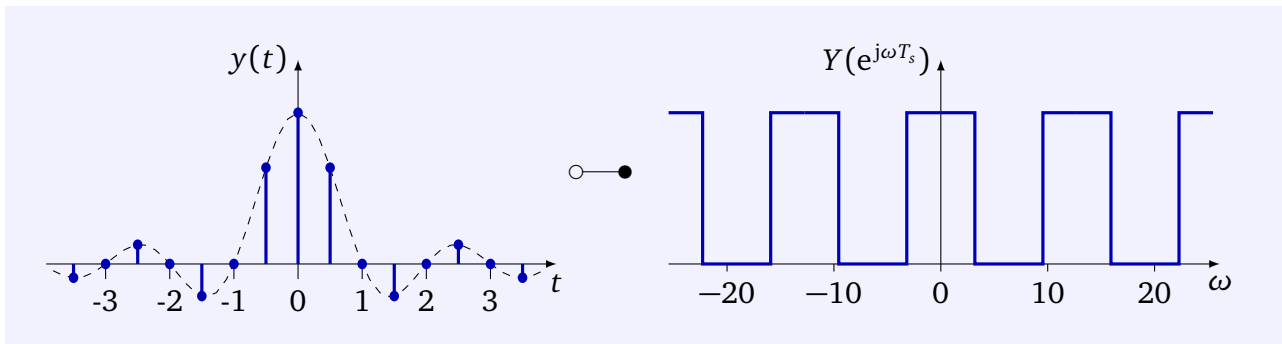
Die Fourier-Transformation ist mit durchgezogenen Linien dargestellt, die gestrichelten Linien zeigen die periodische Fortsetzung der DTFT.

Beispiel 7.11: DTFT eines si-Signals

Betrachtet wird eine normierte si-Funktion $y(t) = \text{si}(\pi t)$. Die Fourier-Transformierte lautet:

$$y(t) = \text{si}(\pi t) \circ \bullet Y(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Wird dieses Signal mit Abtastzeit $T_s = \frac{1}{2}$ abgetastet, ist die DTFT ein periodisches Rechtecksignal mit Breite 2π und Periode $\omega_s = 4\pi$.



Herleitung des Abtasttheorems

Wie kann nun ein zeitkontinuierliches Signal $y(t)$ aus seinen Abtastwerten $y[n]$ rekonstruiert werden? Wie in Abbildung 7.1 angedeutet, bietet die DTFT die Möglichkeit, die Rekonstruktion durch einen Umweg über den Frequenzbereich durchzuführen. Ausgehend von den Abtastwerten muss dabei in drei Schritten vorgegangen werden:

- 1.) Berechnung der DTFT $Y(e^{j\omega T_s})$ aus den Abtastwerten
- 2.) Invertierung der periodischen Fortsetzung durch Tiefpassfilterung mit Grenzfrequenz $\frac{\omega_s}{2}$
- 3.) Inverse Fourier-Transformation

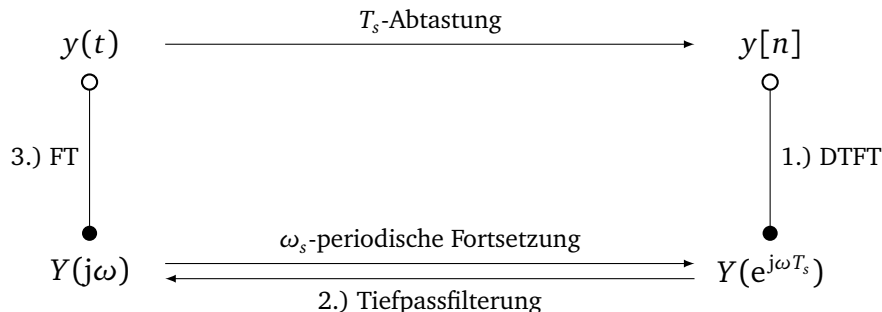


Abbildung 7.1: Abtastung im Zeitbereich entspricht periodischer Fortsetzung im Frequenzbereich.

Schritt 2 verdient nähere Erklärung: Die DTFT $Y(e^{j\omega T_s})$ ist (bis auf einen Faktor T_s) die ω_s -periodische Fortsetzung der Fourier-Transformation $Y(j\omega)$ des zeitkontinuierlichen Signals. Der Prozess der periodischen Fortsetzung kann rückgängig gemacht werden, indem nur eine Periode der DTFT ausgeschnitten wird. Für diese Periode wird üblicherweise das als *Nyquistband* bezeichnete Frequenzintervall von $-\omega_s/2$ bis $\omega_s/2$ gewählt. Einschränkung der DTFT auf das Nyquistband bedeutet ideale Tiefpassfilterung mit Grenzfrequenz $\omega_s/2$. Allerdings wird die periodische Fortsetzung nur dann durch Tiefpassfilterung exakt invertiert, wenn das zeitkontinuierliche Signal ein bandbegrenzttes Spektrum mit einer Bandgrenze $\omega_B < \omega_s/2$ besitzt. Dabei wird unter einem mit ω_B bandbegrenztem Signal ein Signal verstanden, dessen Fourier-Transformation die Bedingung

$$Y(j\omega) = 0 \quad \text{falls } |\omega| \geq \omega_B$$

erfüllt. Ein mit $\omega_B < \omega_s/2$ bandbegrenztes Signal besitzt also keine Frequenzanteile außerhalb des Nyquistbandes. Diese Situation ist in Abbildung 7.2 dargestellt.

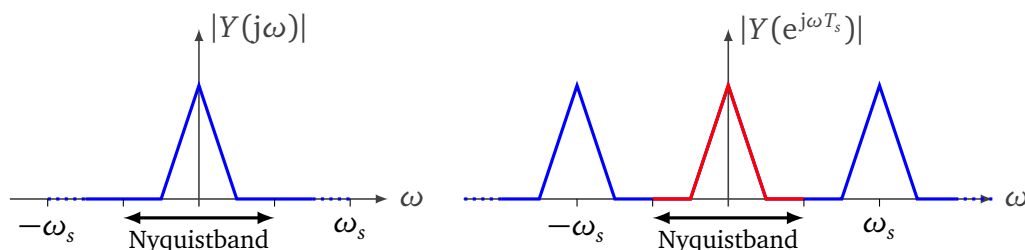


Abbildung 7.2: Links: Bandbegrenztes Spektrum mit Bandgrenze $\omega_B < \omega_s/2$. Rechts: Die ω_s -periodische Fortsetzung. Das Originalspektrum kann durch Einschränkung (rot dargestellt) auf das Nyquistband zurückgewonnen werden.

Zusammengefasst ergibt sich der berühmte

Satz 7.14 (Shannon's Abtasttheorem): Ein zeitkontinuierliches Signal $y(t)$ sei bandbegrenzt mit einer Bandgrenze ω_B , welche die Bedingung

$$\omega_B < \frac{\omega_s}{2} \quad (7.22)$$

erfüllt. Dann kann $y(t)$ fehlerfrei aus den Abtastwerten rekonstruiert werden.

Dieses Ergebnis ist nach Claude Shannon und seinem 1949 erschienenen klassischen Aufsatz *Communication in the Presence of Noise* benannt, der auch heute noch sehr lesbar ist. In der mathematischen Literatur war dieser Sachverhalt schon länger bekannt.

Was aber passiert, wenn die Bedingung (7.22) des Abtasttheorems nicht erfüllt ist, wenn also ein zeitkontinuierliches Signal Frequenzanteile außerhalb des Nyquistbandes enthält? Diese Situation ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Bei der periodischen Fortsetzung überlappen sich die frequenzverschobenen Kopien des Originalspektrums, deren Summe die periodische Fortsetzung bildet. Entsprechend liefert Einschränkung auf das Nyquistband ein Spektrum, das nicht mit dem Originalspektrum übereinstimmt. Rekonstruktion durch Tiefpassfilterung liefert also ein anderes Signal als das ursprüngliche Signal $y(t)$. Hierbei handelt es sich um den schon in Abschnitt 6.5 diskutierten Alias-Effekt, hier allerdings aus der Sichtweise des Frequenzbereichs dargestellt.

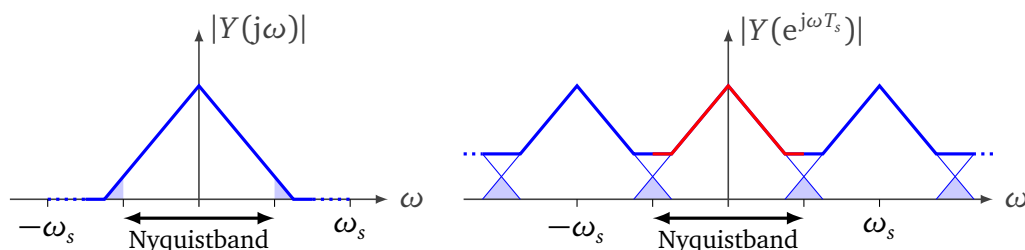


Abbildung 7.3: Links: Bandbegrenztes Spektrum mit Bandgrenze $\omega_B \geq \omega_s/2$. Rechts: Die ω_s -periodische Fortsetzung. Einschränkung (rot dargestellt) auf das Nyquistband liefert ein Spektrum, das *nicht* mit dem Originalspektrum übereinstimmt.

Um den den Alias-Effekt zu vermeiden, wird vor der Abtastung ein Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz $\omega_s/2$ eingebaut. Dadurch wird das Originalsignal zwar verändert, aber es wird auch verhindert, dass das rekonstruierte Signal niederfrequente Anteile enthält, die nur aufgrund der spektralen Überlappung ins Nyquistband gelangen. Zusammen mit dem Rekonstruktionsfilter nach der DA-Wandlung ergibt sich ein Signalflussdiagramm, das typisch für die digitale Signalverarbeitung ist, siehe Abbildung 7.4



Abbildung 7.4: Ein für die digitale Signalverarbeitung typisches Signalflussdiagramm.

Die einzelnen Komponenten sind:

AAF: Anti-Alias-Filter. Ein analoges Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz $\omega_s/2$, um sicherzustellen, dass die Voraussetzung (7.22) des Abtasttheorems erfüllt ist.

AD: Analog-Digital Wandlung.

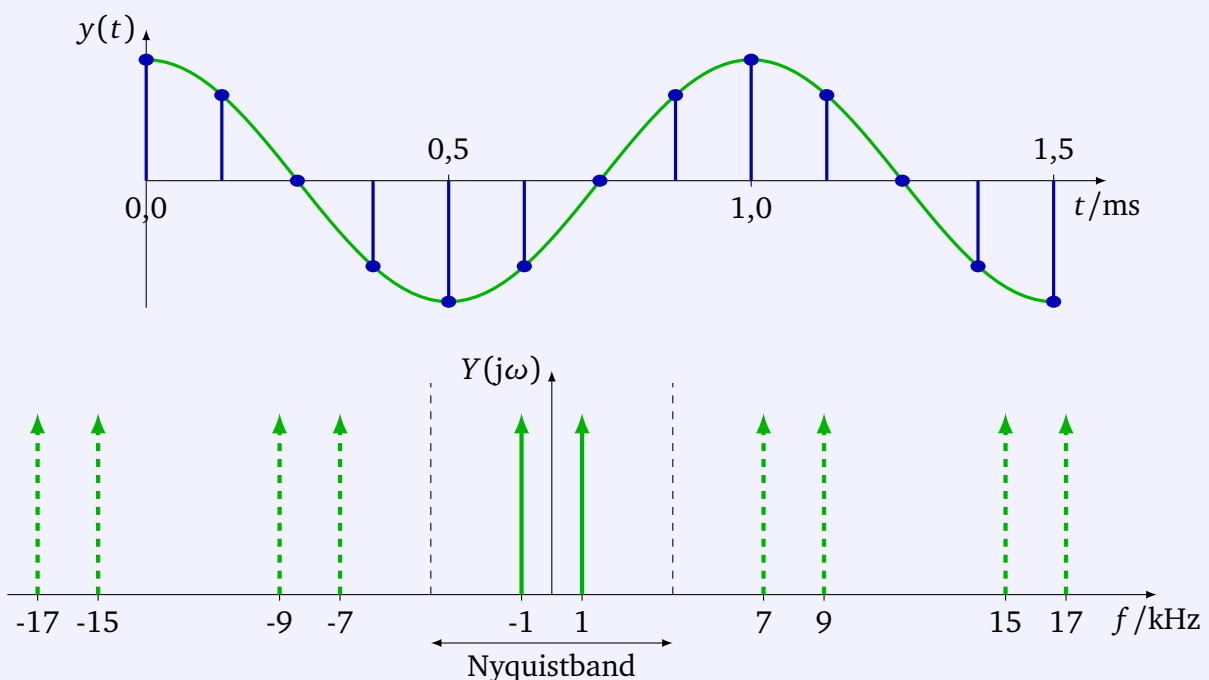
DSP: Rechnerbasierte, digitale Signalverarbeitung.

DA: Digital-Analog Wandlung.

RF: Rekonstruktionsfilter. Ein analoges Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz $\omega_s/2$, um die periodische Fortsetzung der DTFT zu invertieren.

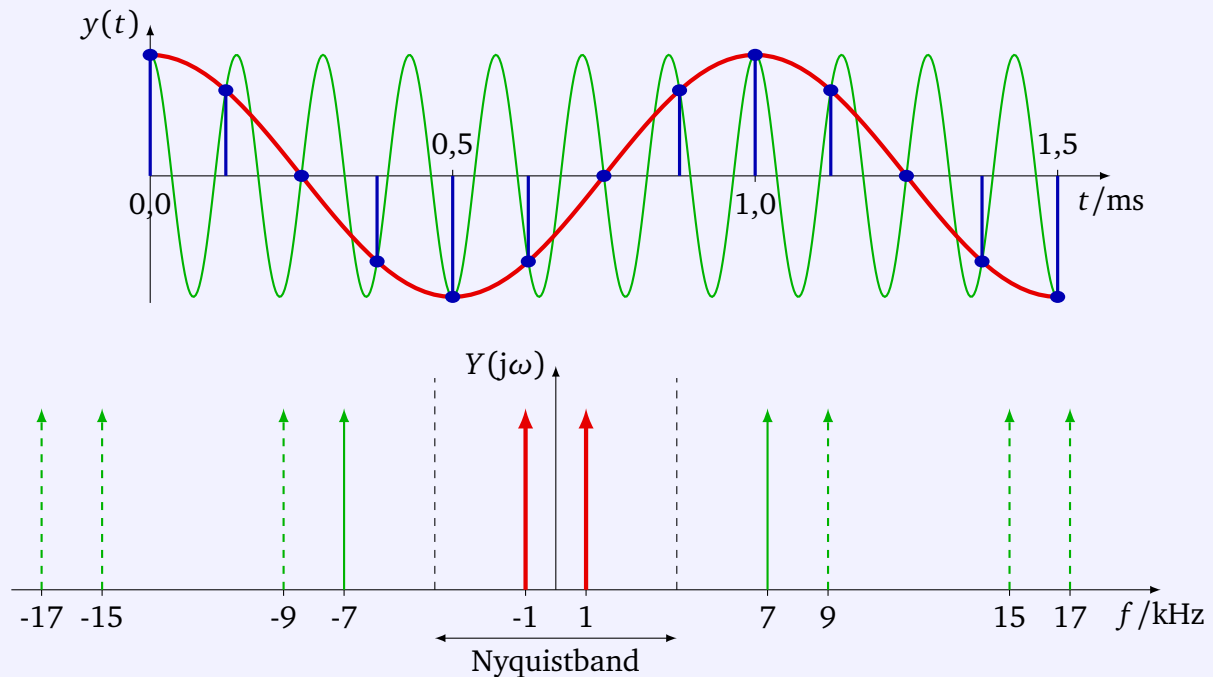
Beispiel 7.12: Erfülltes Abtasttheorem

Das Signal $y(t) = \cos(2\pi f t)$ mit $f = 1$ kHz ist bandbegrenzt mit Bandgrenze $f_B = 1$ kHz. Abtastung mit $f_s = 8$ kHz erfüllt die Voraussetzung des Abtasttheorems. $y(t)$ lässt sich also aus den Abtastwerten rekonstruieren.



Beispiel 7.13: Nicht erfülltes Abtasttheorem

Das Signal $y(t) = \cos(2\pi f t)$ mit $f = 7$ kHz ist bandbegrenzt mit Bandgrenze $f_B = 7$ kHz (dünne grüne Linie). Abtastung mit $f_s = 8$ kHz erfüllt die Voraussetzung des Abtasttheorems nicht. Aufgrund des Alias-Effektes wird ein Kosinus mit Frequenz $|f - f_s| = 1$ kHz reproduziert (dicke rote Linie).



Die Rekonstruktionsformel

Wie füllt sich der Raum zwischen den Stützstellen nach Digital-Analog-Wandlung und Anwendung des Rekonstruktionsfilters gemäß Abbildung 7.4? Die Argumentation erfolgt in drei Schritten:

- 1.) Anwendung der DTFT auf das diskrete Signal $y[n]$:

$$Y(e^{j\omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n T_s}$$

- 2.) Begrenzung der DTFT auf $\pm\omega_s/2$, wobei zur Anpassung an $Y(j\omega)$ mit T_s multipliziert werden muss:

$$Y(j\omega) = T_s \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot Y(e^{j\omega T_s}) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot y[n] e^{-j\omega n T_s}$$

- 3.) Schließlich erfolgt die Rücktransformation:

$$Y(j\omega) \bullet \circ T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_s}{2\pi} \text{si}\left(\frac{\omega_s}{2} t\right) * y[n] \delta(t - n T_s)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \text{si}\left(\frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)\right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \text{si}\left(\frac{\omega_s}{2}t - n\pi\right) = y(t)
 \end{aligned}$$

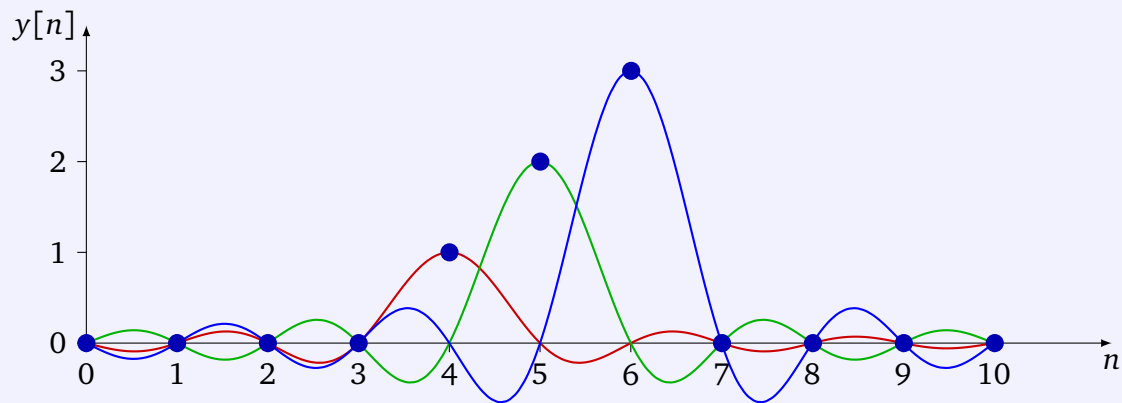
Es handelt sich also um die Summe von verschobenen si-Funktionen. Die drei Schritte können durch einen analogen Tiefpass realisiert werden.

Beispiel 7.14: Rekonstruktion eines Sägezahns

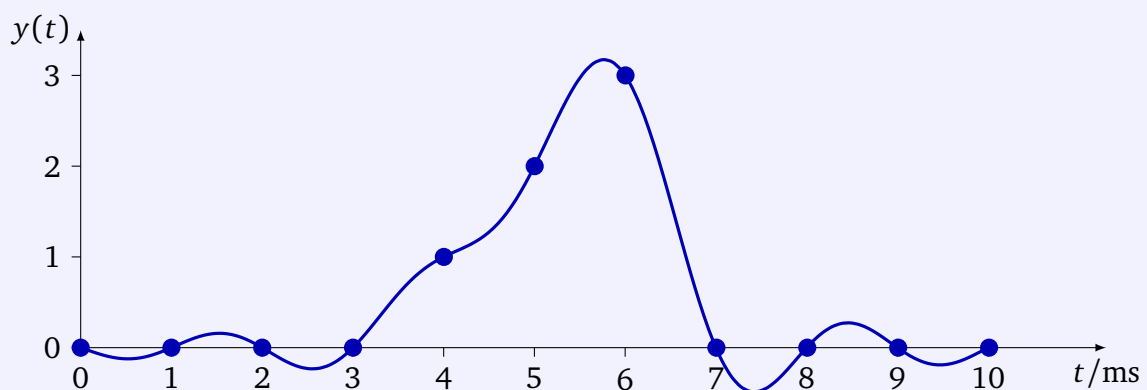
Ein Sägezahn wurde mit folgenden Werten diskretisiert:

$$y[n] = (0; 0; 0; 0; 1; 2; 3; 0; 0; \dots)$$

Die Abtastzeit betrug $T_s = 1$ ms. Für die drei von null abweichenden Werte ergeben sich drei si-Funktionen:



Die Summe nähert sich dem erwarteten Sägezahn.



Anhang A

Polstellen und Zeitverhalten einfacher Systeme

A.1 Reelle Polstellen

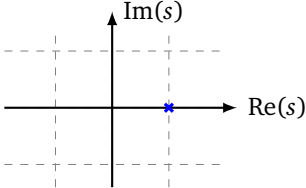
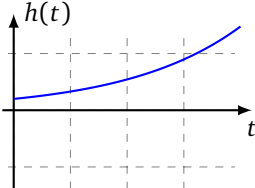
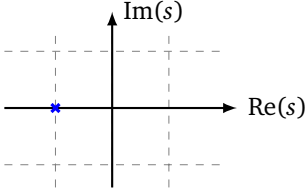
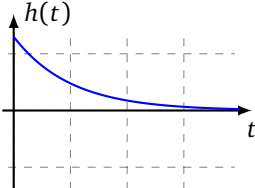
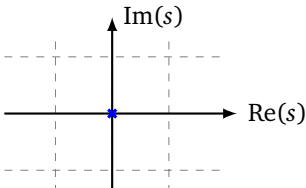
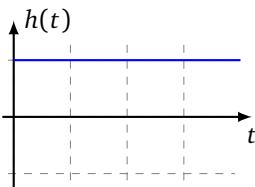
	Bildbereich: Pole von $H(s)$	Zeitbereich: Verhalten von $h(t)$
(1)	Pol auf <i>positiver</i>, reeller Achse (Zeile 4 in Tabelle 4.1)  The s-plane plot shows a horizontal axis labeled $\text{Re}(s)$ and a vertical axis labeled $\text{Im}(s)$. A blue asterisk representing a pole is located on the positive $\text{Re}(s)$ axis.	Exponentiell <i>anwachsend</i>  The time-domain plot shows a horizontal axis labeled t and a vertical axis labeled $h(t)$. A blue curve starts at a positive value on the $h(t)$ axis and increases exponentially as t increases.
(2)	Pol auf <i>negativer</i>, reeller Achse (Zeile 4 in Tabelle 4.1)  The s-plane plot shows a horizontal axis labeled $\text{Re}(s)$ and a vertical axis labeled $\text{Im}(s)$. A blue asterisk representing a pole is located on the negative $\text{Re}(s)$ axis.	Exponentiell <i>fallend</i>  The time-domain plot shows a horizontal axis labeled t and a vertical axis labeled $h(t)$. A blue curve starts at a positive value on the $h(t)$ axis and decays exponentially towards zero as t increases.
(3)	Pol im Ursprung (Zeile 2 in Tabelle 4.1)  The s-plane plot shows a horizontal axis labeled $\text{Re}(s)$ and a vertical axis labeled $\text{Im}(s)$. A blue asterisk representing a pole is located at the origin (0,0).	Sprungfunktion  The time-domain plot shows a horizontal axis labeled t and a vertical axis labeled $h(t)$. A blue horizontal line is drawn at a constant positive value on the $h(t)$ axis for all $t > 0$.

Tabelle A.1: Einfache Systeme mit reellen Polstellen.

A.2 Komplexe Polstellen

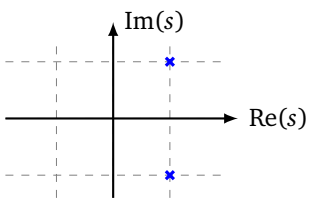
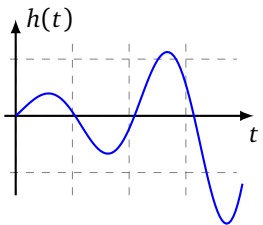
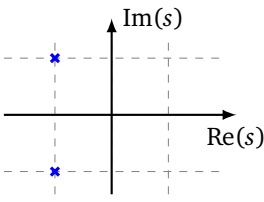
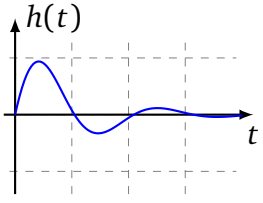
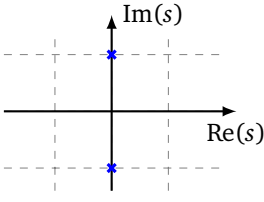
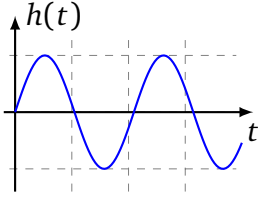
	Bildbereich: Pole von $H(s)$	Zeitbereich: Verhalten von $h(t)$
(4)	Konjugiertes Polpaar in <i>rechter</i> Halbebene (Zeile 10/11 in Tabelle 4.1) 	Exponentiell <i>anwachsende</i> Schwingung 
(5)	Konjugiertes Polpaar in <i>linker</i> Halbebene (Zeile 10/11 in Tabelle 4.1) 	Exponentiell <i>abfallende</i> Schwingung 
(6)	Konjugiertes Polpaar auf imag. Achse (Zeile 6/7 in Tabelle 4.1) 	Ungedämpfte Schwingung 

Tabelle A.2: Einfache Systeme mit komplexen Polen.

Anhang B

Die si-Funktion

Die si-Funktion ist als

$$\text{si}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

definiert. Wichtige Eigenschaften sind:

- Bei $x = 0$ ist die si-Funktion stetig (hat also *keine* Polstelle), denn mit der Regel von l'Hospital folgt

$$\text{si}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

- Die si-Funktion ist gerade:

$$\text{si}(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = \text{si}(x)$$

- Bis auf $x = 0$ hat die si-Funktion die gleichen Nullstellen wie der Sinus:

$$\text{si}(x) = 0, \quad \text{für } x = k\pi \text{ mit } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

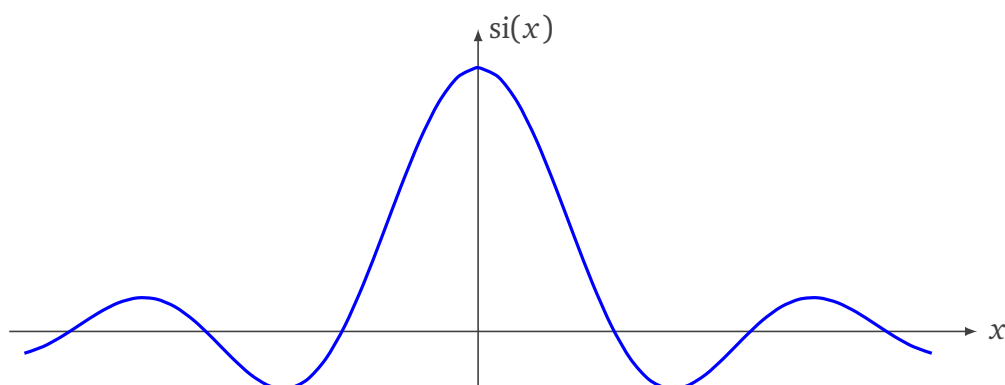


Abbildung B.1: Graphische Darstellung der si-Funktion.

Anhang C

Kleiner Wanderführer durch den Transformationswald

Insgesamt wurden sechs Transformationen besprochen: Laplace-Transformation, z -Transformation und vier Varianten der Fourier-Transformation: Fourierreihe und -koeffizienten, Fourier-Transformation, diskrete Fourier-Transformation (DFT) und zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT). Die Laplace-Transformation ist dabei die Mutter aller Transformationen, aus der sich alle anderen Transformationen ableiten lassen, wie in folgendem Diagramm dargestellt ist:

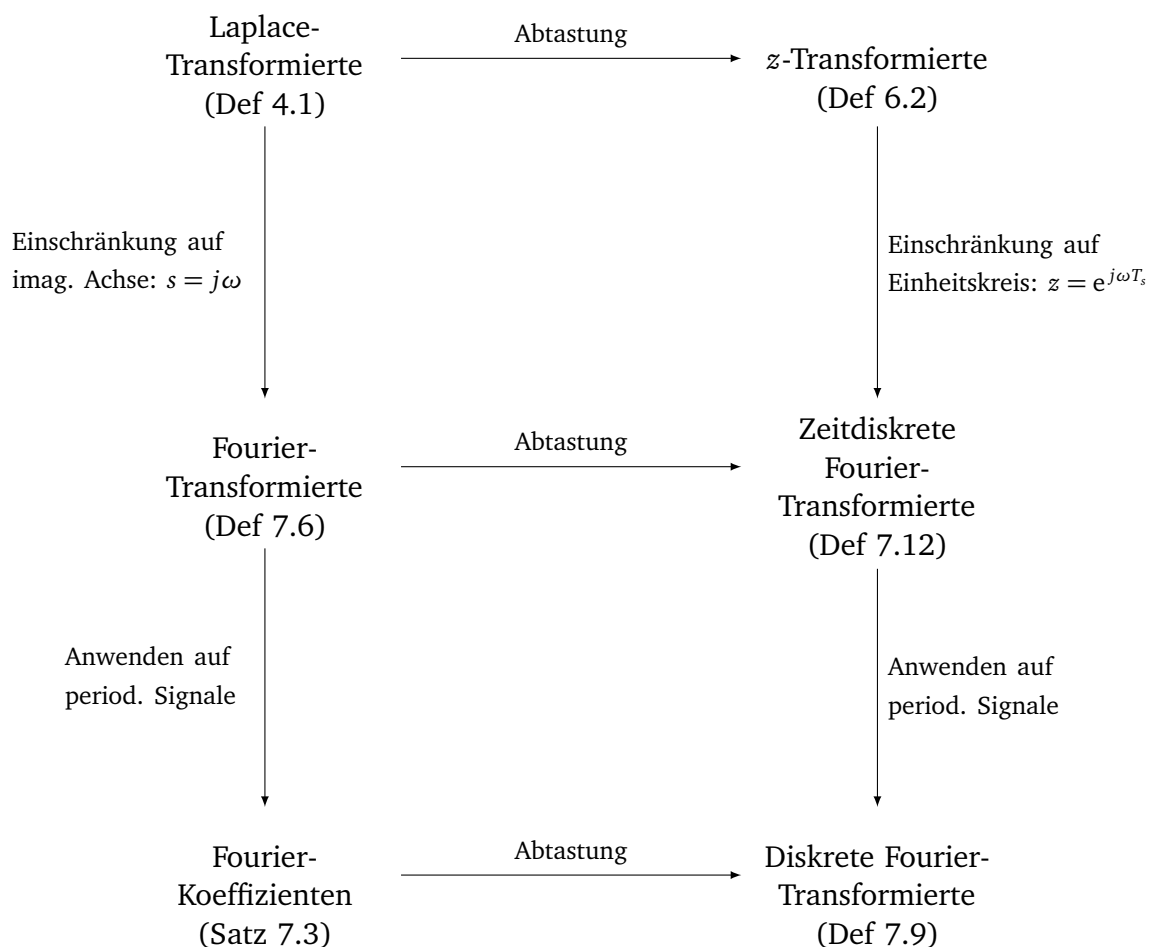


Tabelle der Fourier-Transformationen

Hier sind noch einmal die vier Varianten der Fourier-Transformation tabellarisch aufgelistet, um den Zusammenhang zwischen Abtastung und Periodizität zu verdeutlichen.

Transformierte	Zeitbereich	Frequenzbereich
Fourier-Transformierte	kontinuierlich nicht-periodisch	nicht-periodisch kontinuierlich
Fourier-Koeffizienten	kontinuierlich T_0 -periodisch	nicht-periodisch ω_0 -diskret
DTFT	T_s -diskret nicht-periodisch	ω_s -periodisch kontinuierlich
DFT	T_s -diskret T_0 -periodisch	ω_s -periodisch ω_0 -diskret

Hierbei sind T_s die Abtastzeit, T_0 die Signalperiode und ω_s und ω_0 die entsprechenden Frequenzen. Diese Größen hängen zusammen über

$$T_0 = N \cdot T_s \iff \omega_s = N \cdot \omega_0.$$

N ist die Anzahl der Abtastwerte in einer Signalperiode.

Wann Laplace, wann Fourier?

Die Laplace-Transformation lebt in der komplexen Ebene und ist daher eine recht abstrakte Konstruktion. Die komplexe Variable s erlaubt aber, die Pol- und Nullstellen einer Übertragungsfunktion zu ermitteln. Die folgenden Konzepte benötigen also die Laplace - Transformation:

- Das universelle Rechenrezept nach Satz 4.7
- Das Pol-Nullstellen-Diagramm
- Das Stabilitätskriterium 4.11 im Bildbereich

Darüber hinaus ist die Laplace-Transformation auch auf nicht-integrierbare Signale, insbesondere auf Impulsantworten instabiler Systeme anwendbar. Daher wird die Laplace-Transformation oft in der Automatisierungs- und Regelungstechnik angewandt, wo es um Auslegung und Stabilitätsuntersuchungen von Regelkreisen geht.

Die Fourier-Transformation hat andererseits den Vorteil der anschaulichen Interpretation als Information über die Zerlegung eines Signals in einzelne Frequenzen. Daher wird die Fourier-Transformation hauptsächlich in den Gebieten der Signalverarbeitung und Signalübertragung angewandt.

Literaturverzeichnis

- [1] Dieter Müller-Wichards: *Transformation und Signale*. 2. Auflage. Springer, 2012
- [2] H. Mann, H. Schiffelgen, R. Froriep: *Einführung in die Regelungstechnik*. 8. Auflage. Hanser, 2000
- [3] J. Lunze: *Regelungstechnik 1*. 6.Auflage. Springer, 2007
- [4] M. Meyer: *Signalverarbeitung*. 4.Auflage. Vieweg, 2006
- [5] M. Reuter, S. Zacher: *Regelungstechnik für Ingenieure*. 13. Auflage. Vieweg + Teubner, 2011
- [6] O. Beucher: *Signale und Systeme: Theorie, Simulation, Anwendung: Eine beispielorientierte Einführung mit MATLAB*. Springer, 2011
- [7] U. Siart: *Das Dezibel - Definition und Anwendung* – URL <http://www.siart.de/lehre/dezibel.pdf> – [Online; Abruf 9. Sept. 2014]

Die Referenzen [3], [5] und [6] sind in der neuesten Auflage als elektronische Ressource in der Bibliothek der HAW Hamburg erhältlich.

Index

- 63%-Regel, 46
- Ableitungssatz, 36
- Abtastrate, 7
- Abtastzeit, 7
- Alias-Effekt, 84
- Amplitudengang, 26
- Beobachternormalform, 65
- Beschränktes Signal, 41
- BIBO-Stabilität, 41
- Bildbereich, 33
- bilineare Substitution, 90
- Bode-Diagramm, 29
- DC-gain, 40
- Dezibel, 29
- DFT, 106
- Differenzengleichungen, 73
- Direktstruktur 2, 80
- Dominante Pole, 45
- Effektivwert, 98
- Endwertsatz, 38
- Euler-Formel, 9
- Faltung, 23
- Faltungssatz, 35
- Filter, 71
 - FIR, 88
 - IIR, 88
 - nicht-rekursiv, 88
 - rekursiv, 88
- FIR-Filter, 88
- Flugzeug, 3
- Fourier-Transformation, 26
 - diskret, 106
 - invers, 101
 - kontinuierlich, 99
 - zeitdiskret, 111
- Fourierkoeffizienten, 95
- Fourierreihe
 - komplex, 95
 - reell, 93
- Frequenz, 8
- Frequenzgang, 26
- Führungsgröße, 56
- Gleichspannungsverstärkung, 40
- grenzstabil, 43
- Heaviside-Funktion, 11
- Hurwitz-Kriterium, 43
- I-Glied, 46
- Impulsantwort, 20
- Istwert, 56
- IT1-Glied, 47
- kausales Signal, 11
- Kausalität, 21, 72
- Kreisfrequenz, 8
- Kriechfall, 48
- Lautsprecher, 5
- Linearität, 18, 71
- LZI-System, 19, 72
- MIMO-System, 17
- nicht-rekursive Filter, 88
- Nyquistband, 113
- Nyquistdiagramm, 28
- Ortskurve, 28
- P-Glied, 45
- Parallelschaltung, 54
- Periode, 8
- Periodisches Signal, 8
- Phasengang, 26
- PI-Regler, 57
- PN-Diagramm, 44

Pol-Nullstellen-Diagramm, 44
PT1-Glied, 46
PT2-Glied, 47

RC-Tiefpass, 4
Rechteckregel, 89
Regeldifferenz, 56
Regelgröße, 56
Regelstrecke, 56
Reihenschaltung, 51
reine Phase, 9
Resonanzüberhöhung, 51
Rückkopplungsschleife, 55

Schwingfall, 48
Signal, 6
Signalflussdiagramm, 62
 Direktstruktur 1, 80
 Direktstruktur 2, 80
SISO-System, 17
Sollwert, 56
spektrale Dichte, 99
Sprungantwort, 20
Stabilitätskriterium
 Bildbereich, 43, 85
 Zeitbereich, 42, 85
Stellgröße, 56
System, 6
Systemidentifikation, 45
Systemmatrix, 61

Trapezregel, 90

Unit-Delay, 79

Wurzelortskurve, 57

z-Transformation, 76
zpk-Darstellung, 44
Zustandsraumdarstellung, 61
Zustandsvektor, 60

Übertragungsfunktion
 diskret, 78
 zeitkontinuierlich, 38